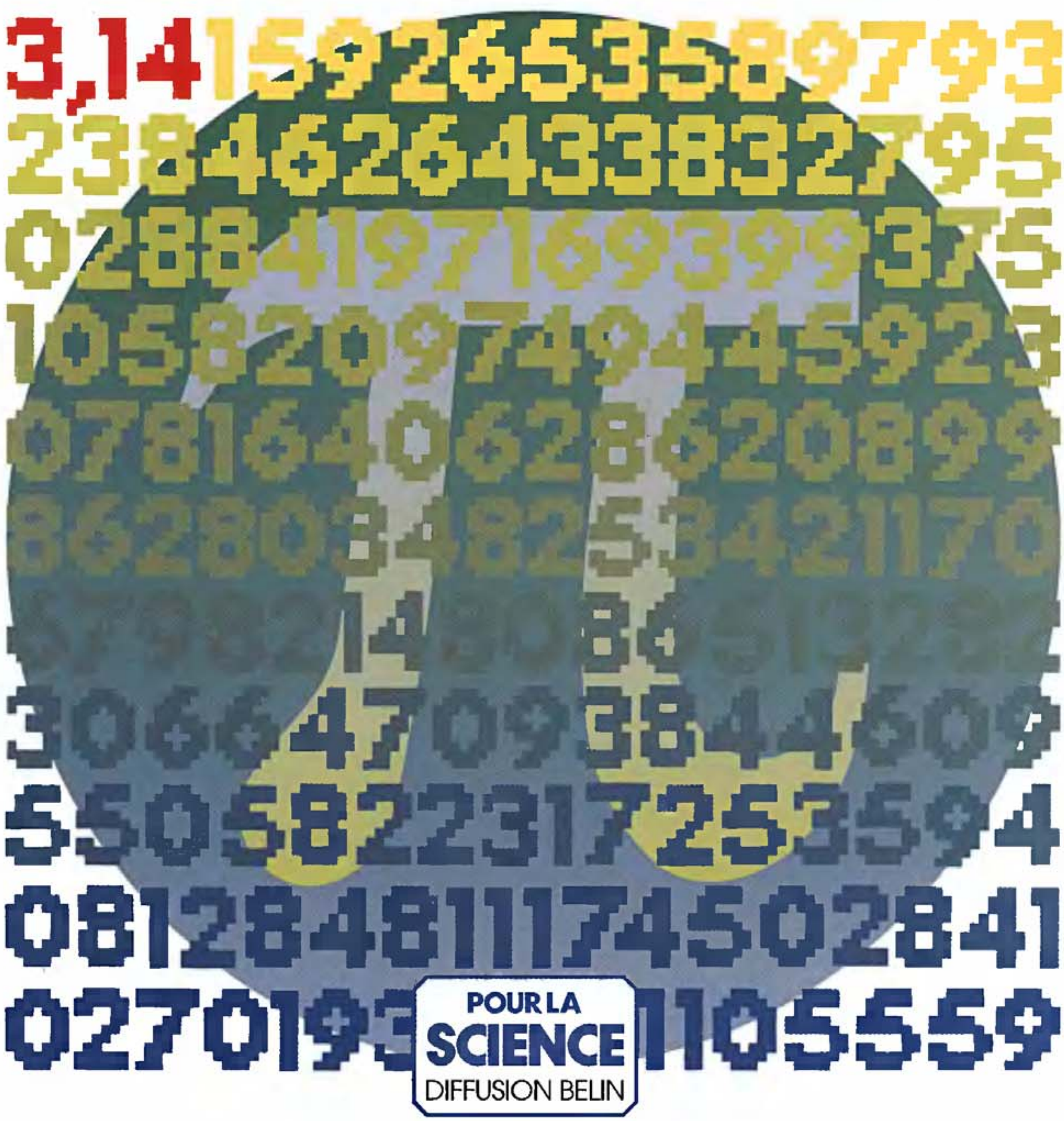
BIBLIOTHÈQUE
POUR LA SCIENCE

Le fascinant nombre π

JEAN-PAUL DELAHAYE



POUR LA SCIENCE
DIFFUSION BELIN

Le fascinant nombre π

POUR LA SCIENCE
DIFFUSION BELIN

8, rue Férou - 75006 Paris

 ISSN 0224-5159 ISBN 2-9029-1825-9

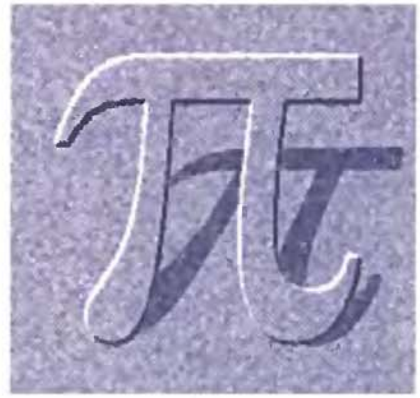
Table des matières

Remerciements :

Je tiens à exprimer mes remerciements à Françoise Adamy, Fabrice Bellard, Jonathan et Peter Borwein, Philippe Boulanger, François Boulier, Claude Brezinsky, Elias Bröms, Claire Delahaye, Martine Delahaye, Jean-Philippe Fontanille, Bénédicte Fiévet, Bernard Germain-Bonne, Jean Guilloud, Myriam Hecquet, Erik Kern, Philippe Mathieu, Bruno Marchal, Étienne Parisot, Simon Plouffe, Yves Roussel, Daniel Saada, Hervé This, Éric Wegrzynowski, Hervé Zwirn qui m'ont apporté leur aide et leurs conseils ou m'ont donné accès à des textes et informations précieuses pour la réalisation de ce livre.

Je suis particulièrement reconnaissant à Yann Esnault, des éditions *Pour la Science*, qui a embelli et sensiblement amélioré le manuscrit original.

Avant-propos



«Explorer π, c'est comme explorer l'Univers...»
David Chudnovsky

«... ou plutôt explorer le monde sous-marin, car nous sommes dans la vase et tout semble sans forme. Nous avons besoin d'une lampe, et notre ordinateur est cette lampe.»
Gregory Chudnovsky

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 ...

Le nombre π est au centre d'un cercle mathématique extraordinaire, mais si grand que personne, sans doute, ne l'explorera entièrement. Ce livre vous en fait parcourir rapidement le tracé avec l'espoir de vous distraire tout en vous montrant comment, après 4000 ans de travail et de découvertes merveilleuses, les mathématiciens arrivent encore à trouver de nouvelles propriétés de π : malgré les connaissances accumulées, ce nombre étincelant reste mystérieux, et certaines questions élémentaires à son sujet semblent même hors de portée des mathématiques actuelles.

Dans ce cercle autour de π, vous rencontrerez :

– *la géométrie*, car il ne faut jamais oublier que π est né des réflexions des anciens géomètres. Aujourd'hui encore, on peut trouver du plaisir dans les judicieuses constructions à la règle et au compas qui obsédèrent des générations de mathématiciens.

– *l'analyse*, avec son cortège de formules magiques – sommes infinies, produits infinis, fractions continues, racines emboîtées –, certaines propres à faciliter le calcul, d'autres non (comment les distinguer ?), mais qui semblent toutes des perles arrachées miraculeusement à l'océan illimité des mathématiques.

– la belle *algèbre* des nombres irrationnels et transcendants, qui permit de comprendre, après 2 000 ans de vaines et parfois divagantes recherches, que la *quadrature du cercle* n'a pas de solution.

– la toute nouvelle *théorie de la complexité* et celle des *suites aléatoires* ; vous apprendrez que le hasard que l'on croit déceler dans les décimales de la constante d'Archimède ne se laisse pas facilement attraper.

– les machines à calculer, puis les ordinateurs sans lesquels les recherches actuelles sur π, même les plus abstraites, n'avanceraient plus guère ; vous découvrirez que l'obsession, en apparence absurde, qui pousse à calculer le plus grand nombre possible de décimales de π, est utile au progrès général des mathématiques et possède d'importantes retombées pratiques.

Vous rencontrerez aussi quelques fous – tels ceux qui apprennent des milliers de décimales de π – et quelques génies – les mêmes parfois –, et vous subirez le charme des questions philosophiques que font naître les mathématiques et qui se concentrent sur π avec obstination.

Ce cercle autour de π renferme bien d'autres choses encore, que je n'énumérerai pas ici : pour les découvrir, il vous faut l'arpenter !

π POUR TOUS

Les aspects de π étant infiniment variés, ce livre concerne tout le monde : certaines parties s'adressent au non-mathématicien, d'autres demandent un petit effort ou une certaine familiarité avec les mathématiques. Nous avons pensé à trois types de lecteurs :

• Les *curieux* qui ont oublié tout ce qu'ils apprirent à l'école en mathématiques trouveront, au début de chaque chapitre, de quoi répondre à une partie de leurs interrogations.

• Les *curieux* qui gardent quelques souvenirs de leur classe de terminale, et qui aimeraient faire connaissance avec π de manière plus approfondie, liront entièrement le corps des chapitres, ce qui les entraînera jusqu'aux découvertes des années 1990.

• Quant aux *curieux* qui jugent que les mathématiques enseignées après le lycée ne sont pas trop absconses, ils liront les annexes des chapitres. Ils verront ainsi comment on établit que π est transcendant, ou pourquoi la probabilité que deux nombres soient premiers entre eux est liée à π. Aucune démonstration n'est délicate, mais π n'est pas docile et son mystère nous fait pénétrer de plain-pied dans l'univers mathématique.

Puisque π est présent dans presque tous les domaines des mathématiques, il était impossible d'être exhaustif. C'est pourquoi nous avons fait des choix : nous avons privilégié ce qui a été découvert ou réalisé sur π depuis 20 ans, et nous avons limité l'espace consacré à son histoire (qui occupe tout de même plusieurs chapitres) ; nous avons insisté plus particulièrement sur les questions liées à la complexité de π : complexité en calcul (algorithmes de multiplication rapides, méthodes à convergence quadratique, quartique, etc.), complexité statistique (normalité de π en base 2, 10 ou autre), place de π dans le classement des nombres selon leur «difficulté» (nombres rationnels, algébriques, transcendants, calculables, aléatoires, etc.). Peut-être réussirons-nous ainsi à convaincre le lecteur que le monde mathématique vit avec plus d'intensité que jamais, et que l'apport du XX^e siècle à la compréhension du mystérieux et inépuisable nombre π vaut bien ceux des siècles précédents.

1

Premières rencontres

Définir et évaluer π

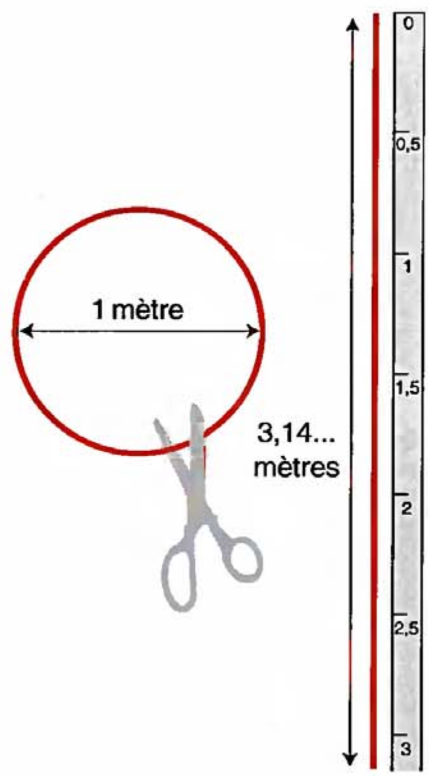
Pour commencer, le mieux est d'aborder π franchement : nous allons examiner les diverses propositions de définition de π, et les méthodes les plus simples que l'on a imaginées pour l'évaluer. Ce nombre π est-il une constante mathématique ou physique ? Confrontés à cette délicate question, nous distinguerons soigneusement les méthodes de calcul qui dépendent d'une hypothèse physique de celles qui n'en dépendent pas.

Premières rencontres avec π

Comment les hommes de la préhistoire et de l'Antiquité ont-ils rencontré π ?

Sans doute comme nous, au détour d'un problème banal de bricolage, de jardinage ou d'artisanat : par exemple, lorsque nous cherchons à déterminer la longueur de corde nécessaire pour faire le tour d'un gros arbre, ou le coût du ruban qui décorera un chapeau ou un abat-jour, ou le nombre de planches qu'il faut mettre côte à côte pour obtenir une barrique de rayon donné, ou la longueur du revêtement qu'il faut coller à la roue d'une charrette pour la protéger, ou la surface de sol que délimite un cercle tracé au cordeau, ou encore la quantité d'eau que contient un réservoir cylindrique, conique ou sphérique, etc.

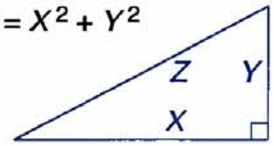
Ces exemples illustrent la plus merveilleuse propriété de π : il est là tout proche, partout avec son infinie profondeur mathématique. Même si nous n'aimons pas les mathématiques, même si nous cherchons à tout prix à les fuir, π nous rattrapera et elles avec. Nous ne choisissons pas de nous intéresser à π, c'est lui, que nous le voulions ou non, qui vient nous voir. Une fois qu'il s'est présenté, impossible de s'en défaire : π nous obsède et nous entraîne dans le monde fascinant de l'ordre géométrique et abstrait.



Quand on déroule un cercle de corde de rayon r, on obtient un segment de droite de longueur $2\pi r$. Dans le cas d'un cercle de une unité de diamètre, la longueur de corde est égale à π.

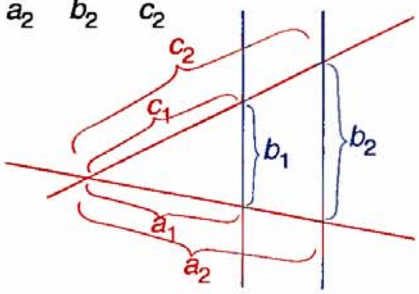
Théorème de Pythagore

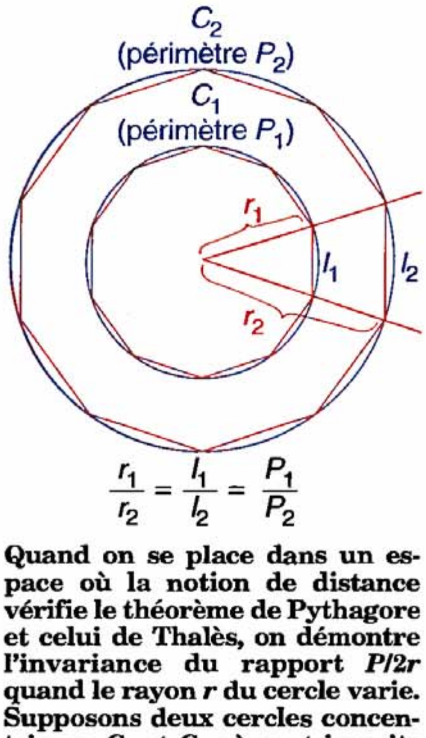
$Z^2 = X^2 + Y^2$



Théorème de Thalès

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$





$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{P_1}{P_2}$

Quand on se place dans un espace où la notion de distance vérifie le théorème de Pythagore et celui de Thalès, on démontre l'invariance du rapport $P/2r$ quand le rayon r du cercle varie. Supposons deux cercles concentriques C_1 et C_2 où sont inscrits deux polygones réguliers de même nombre de côtés. Par le théorème de Thalès, on montre que le rapport de leurs côtés (et par conséquent celui de leurs périmètres) est égal au rapport des rayons r_1 et r_2. En prenant des polygones aux côtés de plus en plus nombreux, on tend vers les périmètres P_1 et P_2 des deux cercles, et on obtient l'égalité $r_1/r_2 = P_1/P_2$.

Essayons d'en donner une définition. La plus simple, semble-t-il, s'énonce : π est le rapport entre le périmètre P d'un cercle et son diamètre D (le double du rayon r). Écrivons cette première formule :

$$\pi = \frac{P}{D} = \frac{P}{2r}$$

Les cercles du monde physique et le π du physicien

Est-on sûr que le rapport $P/2r$ reste le même quand la taille du cercle change ? Autrement dit, est-ce que π est défini sans ambiguïté par l'énoncé ci-dessus ?

La réponse habituellement donnée est *oui* ; on démontre qu'il en est ainsi dans tout espace où une notion de distance existe et où le théorème de Thalès est vérifié.

Il faut disposer d'une notion de distance pour parler de cercle, puisqu'un cercle est l'ensemble des points se trouvant à une distance constante (nommée rayon) d'un point fixe (nommé centre). Quant au théorème de Thalès, en voici l'énoncé :

Deux droites parallèles découpent sur deux droites concourantes des segments dont les rapports des longueurs sont égaux.

Pour être en mesure de mener des raisonnements géométriques, on suppose que la distance dont on dispose vérifie le théorème de Pythagore *(le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés).*

Dans cette hypothèse, on établit sans peine que $P/2r$ ne dépend pas du rayon du cercle. En effet, il découle du théorème de Thalès que deux polygones réguliers inscrits dans des cercles concentriques et possédant le même nombre de côtés ont des périmètres proportionnels aux rayons des cercles. En «sautant» des périmètres des polygones aux périmètres des cercles par un passage à la limite (c'est-à-dire en envisageant des polygones avec un nombre de côtés de plus en plus grand), on trouve que les circonférences des deux cercles sont dans le même rapport avec leurs rayons ; autrement dit, $P/2r$ ne dépend pas du cercle. Nous avons ainsi défini une constante : le «π du périmètre».

Les espaces mathématiques où ce raisonnement est possible sont nommés *espaces euclidiens*. Il en existe des définitions savantes et compliquées, mais nous n'allons pas nous lancer dans l'axiomatique !

On admet en général que notre espace physique est un espace euclidien, et donc que π est une constante physique, mesurable expérimentalement à partir d'un cercle *quelconque* pour lequel on évalue $P/2r$.

En réalité, les choses ne sont pas si simples. D'après la théorie de la relativité générale d'Einstein, il n'est pas vrai que notre espace soit parfaitement euclidien. Par conséquent, dans «notre» monde physique, le rapport $P/2r$ n'est pas indépendant du cercle que l'on considère.

Pour comprendre la raison de cette variation du rapport $P/2r$ dans les espaces décrits par la relativité générale, il suffit de se ramener à la dimension deux, où les équivalents des espaces courbes qu'envisagent les physiciens relativistes sont les surfaces non planes, par exemple les sphères.

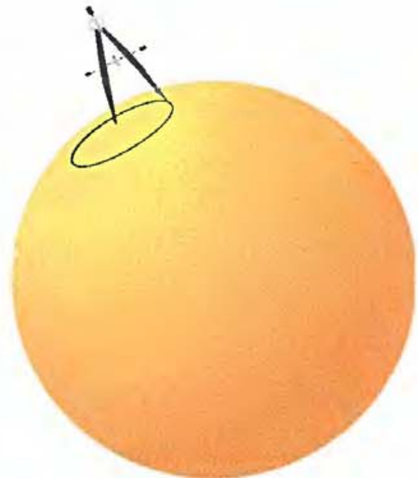
Sur une sphère très grande – pensez à la Terre –, si vous tracez des petits cercles, la quantité $P/2r$ est constante aux erreurs de mesure près. En revanche, si vous tracez un grand cercle, le centre de votre tracé n'est plus du tout dans le même plan que la circonférence du cercle, et la valeur r que vous mesurez (si vous ne prenez en compte que les points de la sphère) est surévaluée, ce qui conduit à une diminution du rapport $P/2r$. Plus les cercles que vous considérez sont grands, plus $P/2r$ est petit. Autre changement par rapport au plan : sur une sphère, il n'y a pas de cercle aussi grand que l'on veut. Le plus grand est l'équateur !

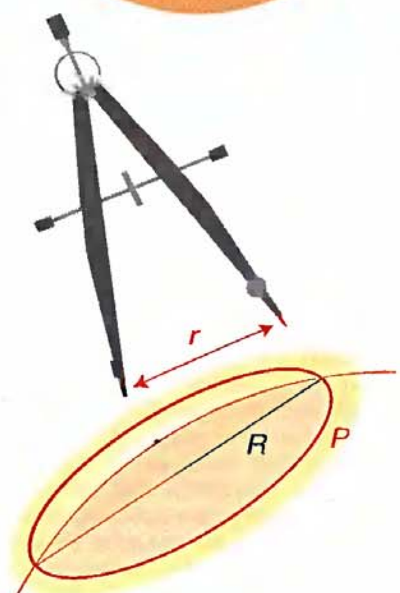
Dans notre espace, qui est l'équivalent tridimensionnel d'une sphère ou même d'une surface plus compliquée, le même phénomène se produit vraisemblablement. Heureusement, pour tous les cercles que nous rencontrons usuellement, les erreurs de mesure sont bien supérieures à cette déviation relativiste, qui échappe pour l'instant à toute évaluation expérimentale réelle.

Un physicien m'a fait remarquer que π reste malgré tout définissable géométriquement dans l'espace de la relativité générale, comme la limite du rapport $P/2r$ quand r tend vers 0. On pourrait lui rétorquer que, suivant les principes de la mécanique quantique, les très petites longueurs (et donc les très petits cercles) n'ont pas de réalité physique ; par conséquent, il est impossible de définir π dans notre monde physique comme la limite géométrique de $P/2r$. Dans cette histoire, comme souvent, la relativité jette le trouble et la mécanique quantique interdit de retomber sur ses pieds quand on croit y arriver.

Le «π physique» est d'ailleurs très instable : puisque la courbure de l'espace varie en fonction des masses présentes, le rapport $P/2r$ du cercle que vous avez dessiné sur votre feuille change quand vous passez la main au-dessus !

Si π était une constante physique, et que l'on cherchait à en améliorer la connaissance uniquement pour faire de la physique, ces difficultés seraient fondamentales et ne pourraient pas être négligées. En fait, π est une constante mathématique, et c'est à sa place dans l'univers mathématique que nous allons nous intéresser.





À la surface d'une sphère, en écartant un compas de r, nous traçons un cercle de périmètre P plus petit que $2\pi r$. L'écart entre P et $2\pi r$ est d'autant plus grand que le cercle est grand. Le rayon réel R, défini comme le rapport $P/2\pi$, est le rayon tracé sur la surface plane obtenue en découpant une calotte selon le tracé du cercle. Des êtres à deux dimensions habitant la surface de la sphère mesureraient par arpentage un rayon supérieur à R. La relativité générale indique que notre espace est un peu comme une sphère.

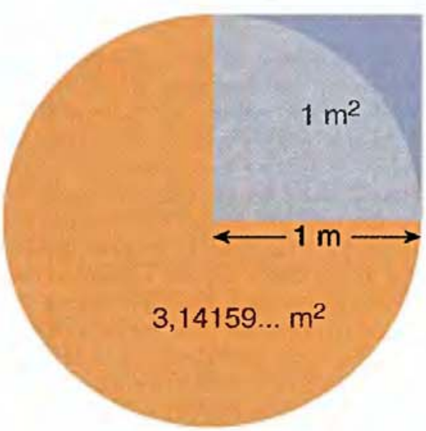
Pour terminer sur cette question, remarquons que, même si l'Univers physique était parfaitement euclidien, et que l'on cherchait à évaluer le périmètre de la partie visible de l'Univers à partir de son rayon avec une précision équivalant à la taille d'un atome d'hydrogène, alors la connaissance de π avec 40 décimales serait largement suffisante. Comme les 40 premières décimales de π sont connues depuis le début du XVIII^e siècle, le travail de calcul de π serait terminé.

(Notons que, même dans les univers non-euclidiens, π apparaît dans la formule du périmètre : dans la géométrie non-euclidienne du mathématicien russe Nikolaï Lobatchevski, le périmètre d'un cercle est donné par la formule $P = \pi k(e^{r/k} - e^{-rk})$, où k est une constante qui dépend de l'espace et e la célèbre constante de l'analyse, égale à 2,71828...)

Première définition de π

En résumé, le π dont il est question dans ce livre est celui des mathématiciens, celui des espaces «bien plats», dits *euclidiens* : quelle que soit la taille du cercle considéré dans de tels espaces, le rapport de son périmètre à son diamètre, $P/2r$, est constant. Le nombre ainsi défini n'est pas une constante *physique*, bien que, pendant des siècles, on se soit trompé sur ce point : avant le XIXe siècle (et la découverte de géométries non euclidiennes par János Bolyai, Bernhard Riemann et Lobatchevski), on ne soupçonnait même pas que l'espace puisse être autrement qu'euclidien. L'hypothèse que l'espace est euclidien, considérée auparavant comme une *évidence absolue*, comme un des fondements mêmes de la raison, s'est révélée discutable, puis fausse (puisque la relativité générale a été confirmée expérimentalement).

Nous connaissons à présent la condition de validité de la première définition de π, la plus naturelle, $\pi = P/D = P/2r$; on déduit de cette formule que π est la longueur en mètres de la circonférence d'un cercle dont le diamètre vaut un mètre.



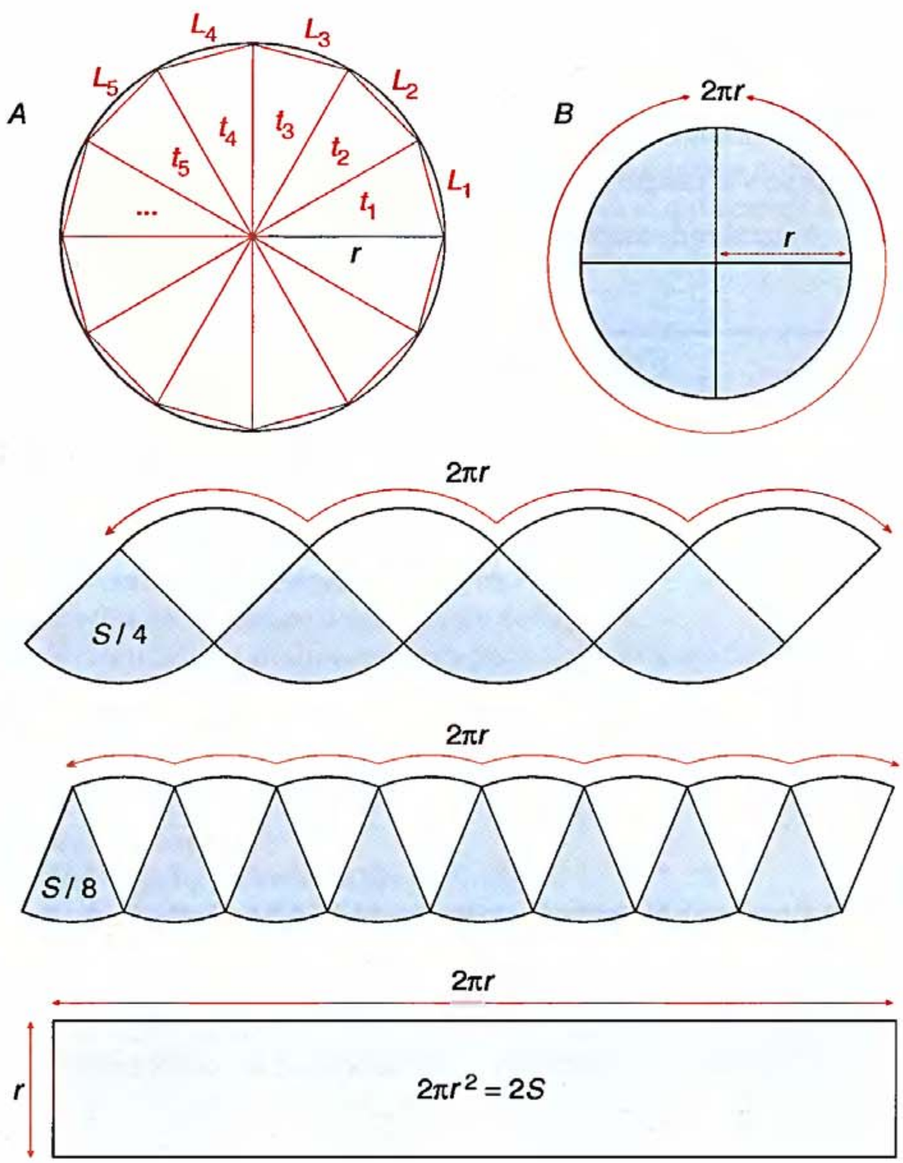
La surface d'un disque de un mètre de rayon est exactement π.

Une deuxième définition géométrique de π

Voici une autre définition de ce nombre ubiquiste : π est le rapport de la surface d'un cercle au carré de son rayon, $\pi = S/r^2$. Comme précédemment, on doit supposer l'espace euclidien ; on déduit de cette deuxième formule que π est la surface en mètres carrés d'un cercle de un mètre de rayon.

En lisant le paragraphe précédent, vous avez dû tiquer et vous demander : «c'est bien beau, deux définitions pour un même nombre, mais c'est une de trop ; qu'est-ce qui me prouve que c'est le même nombre π que l'on a ainsi défini ?» Faites attention, car vous avez mis la main dans l'engrenage : vous allez vous lancer dans des raisonnements dont vous ne pourrez plus sortir. Vous étiez prévenu : π est un piège.

Ce premier problème est heureusement facile à résoudre, et la solution en est présentée ci-dessous. Elle repose sur l'assimilation de secteurs de cercle à des triangles, et sur un passage à la limite. On voit que c'est le même π qui apparaît dans les formules de la circonférence et de l'aire du cercle.



De la formule reliant la circonférence d'un cercle à son diamètre, on passe à la formule reliant l'aire d'un cercle à son rayon, où π apparaît de nouveau. On imagine un polygone inscrit dans un cercle *(A)* et possédant un très grand nombre de côtés. Soit *P* le périmètre du cercle, valeur approchée par la somme des longueurs des côtés du polygone. La surface du cercle est presque égale à celle du polygone, laquelle est égale à la somme des surfaces des triangles t_i dont les bases sont les côtés L_i du polygone. La surface de chaque étroit triangle t_i, égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, est peu différente de $rL_i/2$, car la hauteur est assimilable à r. Pour n très grand, la surface du polygone (et celle du cercle) est : $S = (rL_1/2 + rL_2/2 + ... + rL_n/2) = r(L_1 + L_2 + ... + L_n)/2 = Pr/2$. Comme $P = 2\pi r$, on trouve $S = \pi r^2$. Le π apparaissant dans la formule de la surface du cercle est bien le même que celui de la formule du périmètre. Cette démonstration géométrique, reposant sur l'idée qu'un polygone ayant un grand nombre de côtés est assimilable à un cercle, peut être rendue parfaitement rigoureuse par les méthodes classiques de passage à la limite de l'analyse. On a également figuré une démonstration purement visuelle du résultat précédent *(B)*, où l'on découpe le cercle en secteurs que l'on dispose ensuite en une bande. Cette méthode du réarrangement semble connue depuis l'Antiquité.

Une première définition arithmétique de π

La définition de π à partir de la surface d'un disque permet d'en imaginer une autre, très simple et reposant uniquement sur des calculs avec des nombres entiers. Donnons toutefois de cette méthode purement arithmétique une traduction géométrique.

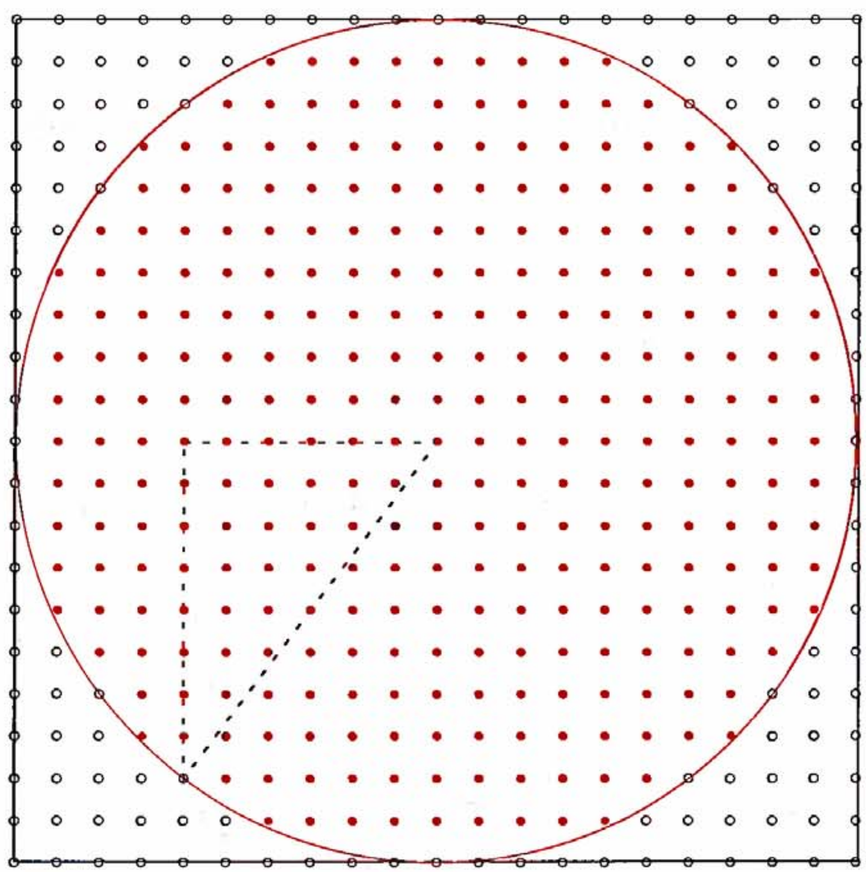
Dessinons un réseau carré de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ points, régulièrement espacés de $1/n$, et comptons ceux de ces points qui sont à une distance du point central inférieure à 1 ; en calculant le rapport de ce nombre au nombre total de points (compris dans un carré de côté 2 centré sur ce même point), on obtient une approximation de π/4 et, en multipliant par 4, une approximation de π.

En faisant correspondre à chaque point un couple d'entiers, on obtient l'approximation s_n, exprimée sous une forme arithmétique :

$$s_n = \frac{4}{(2n+1)^2}\left(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } -1 < \frac{x}{n}, \frac{y}{n} < 1 \text{ et } \frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} < 1\right)$$

ce qui peut s'arranger en ne considérant qu'un huitième de cercle :

$$s'_n = \frac{8\left(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } 0 \le x \le y \le n \text{ et } x^2 + y^2 < n^2\right)}{n^2}$$



Méthode de détermination de π ne reposant pas sur une hypothèse physique. Pour un entier n donné, on prend tous les couples d'entiers (x, y) avec x et y compris entre $-n$ et $+n$ (il y en a $(2n+1)^2$), et l'on dénombre ceux qui vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 < n^2$. Le nombre trouvé, divisé par $(2n+1)^2$ et multiplié par 4, est une valeur approchée par défaut de π. En effet, l'aire du cercle valant πr^2 et celle du carré circonscrit $4r^2$, le rapport des deux aires vaut π/4, et le rapport des nombres de points enfermés par les deux figures tend vers cette valeur quand n augmente. Dans l'exemple ci-contre, où $n = 10$, le nombre total de points est $21 \times 21 = 441$, et le nombre de points tels que $x^2 + y^2 < 100$ *(en rouge)* est égal à 305 ; d'où l'approximation suivante : $4 \times 305/441 = 2{,}7664$... En pointillés, on a représenté les coordonnées du point (–6, –8) pour lequel $x^2 + y^2 = 100$; ce point, situé sur la circonférence du cercle, n'est pas compté.

Le calcul pour $n = 20$ donne $\pi = 3{,}16$; pour $n = 100$, on obtient $\pi = 3{,}151$ et pour $n = 200$, $\pi = 3{,}146$ (on notera dorénavant en rouge les décimales inexactes de π).

Les termes de ces suites sont des approximations de la surface du cercle de centre (0, 0) et de rayon 1 dans le plan mathématique. Comme le plan mathématique est euclidien *à coup sûr,* cette définition ne repose sur aucune hypothèse physique tout en étant parfaitement précise et en ne faisant intervenir que des nombres entiers.

Le calcul de s_n ou de s'_n peut être fait à la main ou à l'aide d'un ordinateur, mais pour obtenir une précision de p chiffres décimaux, il faut utiliser $n = 10^p$ et effectuer environ 10^{2p} multiplications entre nombres de p chiffres (le calcul des x^2 et des y^2), sans compter les additions et les comparaisons de nombres. Cette inflation des calculs interdit que l'on l'utilise s_n ou s'_n pour calculer ne serait-ce que 20 chiffres décimaux de π : même avec le plus puissant des ordinateurs actuels, vous n'iriez pas bien loin.

Toutefois, cette définition est importante : elle montre que, même en restant à un niveau élémentaire, on peut donner une définition de π qui ne repose sur aucune hypothèse physique et qui permet *en principe* un calcul aussi précis qu'on le souhaite.

Encore des définitions géométriques

Les deux premières définitions géométriques de π coïncident ; celles qu'on déduit des formules suivantes s'y ramènent aussi :

- $4\pi r^3/3$ = volume d'une sphère de rayon r, d'où :
  π = 3/4 du volume d'une sphère de rayon 1.
- $4\pi r^2$ = surface d'une sphère de rayon r d'où :
  π = 1/4 de la surface d'une sphère de rayon 1.

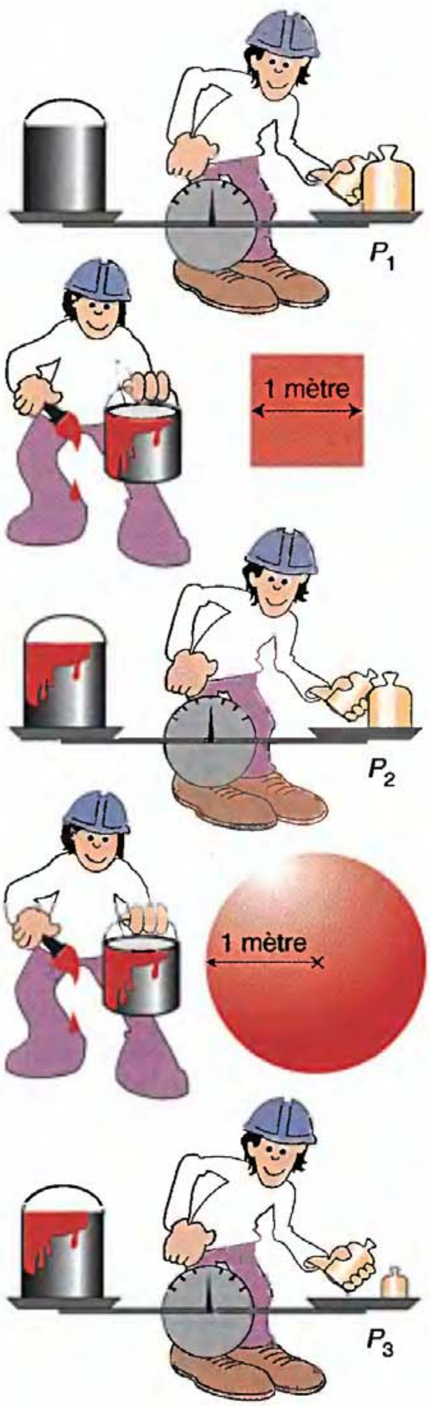
De toutes ces définitions, on peut tirer des méthodes expérimentales élémentaires d'évaluation de π qui, en théorie, donneraient π avec autant de précision qu'on le souhaite, mais qui, en pratique, ne permettraient pas de calculer plus d'une dizaine de décimales en raison des erreurs de mesure et de la nature non euclidienne de l'espace.

Voici quelques-unes de ces méthodes :

- Mesurer avec une ficelle le périmètre d'un cercle de rayon 1.
- Compter le nombre de carreaux entièrement inclus dans un cercle tracé sur une feuille à carreaux (on divise le nombre de carreaux trouvés par le carré du nombre de carreaux du rayon). Cela donne une valeur par défaut. En ajoutant les carreaux qui coupent la circonférence, on obtient une valeur par excès. Par exemple, avec un cercle de dix carreaux de rayon, on trouve que : $2{,}96 \leq \pi \leq 3{,}72$.

$$\frac{(P_2 - P_1)}{1000} \times \frac{3}{4} = \pi$$

Mesure de π à l'aide d'une sphère, dont le volume est égal à $4\pi r^3/3$. Le personnage pèse un récipient sphérique d'un mètre de rayon avant et après remplissage, divise la différence de masse (exprimée en kilogrammes) par 1000 (masse d'un mètre cube d'eau), puis multiplie le résultat par 3/4 pour obtenir une valeur expérimentale de π.



$$\frac{(P_3 - P_2)}{4\,(P_2 - P_1)} = \pi$$

Mesure de π en utilisant le fait que la surface d'une sphère est égale à $4\pi r^2$. Le personnage peint un carré d'un mètre de côté, puis une sphère d'un mètre de rayon, et calcule le rapport des quantités de peinture utilisées.

• Peser l'eau contenue dans un cylindre ou dans une sphère, ou la peinture nécessaire pour peindre la surface d'une sphère.

Les définitions plus abstraites

Les mathématiciens modernes sont peu sensibles aux charmes de la géométrie : aujourd'hui, rares sont les livres où π est défini géométriquement comme je viens de le faire. On préfère définir π à partir de notions d'analyse. On trouve par exemple la définition suivante de π à la page 217 du livre *Analyse* de J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse (éditions Dunod, Paris, 1988) :

«Définition V.4.1. On appelle **pi** et on note π le double de l'unique racine ω de l'équation $\cos x = 0$ comprise entre 0 et 2.»

La fonction cos*(x)*, quant à elle, a été définie à la page 210 de l'ouvrage précité par la formule :

$$\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$$

où z est un nombre complexe et i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Bien entendu, cette formule présuppose connue la fonction exponentielle complexe. Celle-ci a été définie page 209 par la formule :

$$\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

définition qui, à son tour, s'appuie sur celles des nombres complexes et des séries convergentes données antérieurement dans le manuel : pour comprendre la définition de π, vous ne devez pas avoir manqué les leçons précédentes !

Nicolas Bourbaki, le célèbre mathématicien éternel (c'est en fait un groupe de mathématiciens qui se renouvelle régulièrement), cultive parfois l'art de rendre compliqué ce qui est simple. En FVR III.4§1 (Bourbaki ne numérote pas les pages de son traité), il définit π comme le nombre réel qui apparaît dans la formule $2\pi e(x)$ de la dérivée de la fonction $e(x)$, qui est l'homomorphisme continu du groupe additif **R** sur le groupe multiplicatif **U** des nombres complexes de valeur absolue 1, dont l'existence et l'unicité ont été établies précédemment.

Ce type de définitions par l'analyse est aujourd'hui assez bien accepté, car une définition par la circonférence du cercle obligerait un mathématicien voulant satisfaire aux critères de rigueur actuels, d'une part à développer la notion d'espace euclidien, et d'autre part à présenter le calcul intégral (indispensable pour parler de la longueur d'un arc). En outre, la définition par l'analyse facilite l'étude de la trigonométrie et permet finalement de retrouver la définition par la circonférence. Au bout du compte, un mathématicien contemporain est naturellement amené à adopter cette démarche en apparence compliquée.

FVR III.4 FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES § 1

3. Dérivées des fonctions circulaires; nombre π

On a défini, en Topologie générale (TG, VIII, p. 8) l'homomorphisme continu $x \mapsto \mathbf{e}(x)$ du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1; c'est une fonction périodique de période principale 1, et on a $\mathbf{e}(\frac{1}{4}) = i$. On sait (*loc. cit.*) que tout homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$ est de la forme $x \mapsto \mathbf{e}(x/a)$, et qu'on pose $\cos_a x = \mathscr{R}(\mathbf{e}(x/a))$, $\sin_a x = \mathscr{I}(\mathbf{e}(x/a))$ (*fonctions trigonométriques*, ou *fonctions circulaires*, de base a); ces dernières fonctions sont des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $[-1, +1]$, admettant a pour période principale. On a $\sin_a(x + a/4) = \cos_a x$, $\cos_a(x + a/4) = -\sin_a x$, et la fonction $\sin_a x$ est croissante dans l'intervalle $[-a/4, a/4]$.

PROPOSITION 3. — *La fonction* $\mathbf{e}(x)$ *admet en tout point de* $\mathbf{R}$ *une dérivée égale à* $2\pi i\mathbf{e}(x)$, *où* π *est une constante* > 0.

En effet, le th. 1 de III, p. 1, appliqué au cas où E est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, donne la relation $\mathbf{e}'(x) = \mathbf{e}'(0)\mathbf{e}(x)$; en outre, comme $\mathbf{e}(x)$ a une norme euclidienne constante, $\mathbf{e}'(x)$ est orthogonal à $\mathbf{e}(x)$ (I, p. 15, *Exemple* 3); on a donc $\mathbf{e}'(0) = \alpha i$, avec α réel. Comme $\sin_1 x$ est croissante dans $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, sa dérivée pour $x = 0$ est $\geqslant 0$, donc $\alpha \geqslant 0$, et comme $\mathbf{e}(x)$ n'est pas constante, $\alpha > 0$; il est d'usage de désigner le nombre α ainsi défini par la notation 2π.

Page du traité de N. Bourbaki où le nombre π est défini, au détour d'un exposé d'analyse, comme une constante apparaissant dans la dérivée de la fonction exponentielle.

En 1934, les mathématiciens n'avaient pas encore renoncé aux définitions géométriques de π, et le mathématicien Edmund Landau déclencha une grave polémique en donnant, dans un manuel de mathématiques publié à Göttingen, une définition de π analogue à celle qui est énoncée sur la page précédente, c'est-à-dire fondée elle aussi sur les racines de l'équation $\cos x = 0$. Cette polémique, dans le climat politique raciste de l'époque, conduisit à la révocation de Landau de sa chaire à l'Université de Göttingen.

La définition de π par radicaux ou la quadrature du cercle

Le problème de la quadrature du cercle, dont nous reparlerons en détail aux chapitres 2, 3 et 9, a obsédé les mathématiciens pendant des siècles. On peut voir ce problème comme la recherche d'une définition simple de π qui éviterait les complications auxquelles les mathématiciens se soumettent aujourd'hui.

En effet, l'objectif de la quadrature du cercle (construire un carré de même aire qu'un cercle donné en utilisant uniquement une règle et un compas) revient à définir π à partir des nombres entiers et de l'opération de calcul d'une racine carrée, c'est-à-dire à rechercher pour π une expression du type :

$$\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}=3{,}141533$$

Si une telle définition *par radicaux* était possible, les manuels actuels de mathématiques avancées n'auraient pas à faire ces terribles contorsions qui coûtèrent son poste à Landau. De même qu'il fut difficile aux hommes d'accepter que √2 ne soit pas le quotient de deux nombres entiers, il fallut attendre l'année 1882 pour que les mathématiciens admettent que π n'est pas définissable par radicaux *(voir le chapitre 9)*.

Mesures expérimentales de π

En exploitant les propriétés de π, on conçoit des méthodes expérimentales probabilistes pour le mesurer. La plus simple (qui suppose que l'espace est euclidien) utilise des fléchettes.

On trace un cercle inscrit exactement dans un carré et on lance des fléchettes de très loin sur la cible ainsi constituée. Parmi celles qui touchent la cible, il y en a une proportion de π/4 qui sont dans le cercle. En lançant un très grand nombre de fléchettes, on obtient une approximation de π/4, et donc de π.

Les méthodes de Monte-Carlo

La méthode des fléchettes s'adapte sous la forme d'un programme utilisant des tirages au sort faits par l'ordinateur. Le principe du programme est le suivant : au moyen de la fonction *random* du langage de programmation, l'ordinateur choisit au hasard deux nombres x et y compris entre les entiers $-m$ et $+m$ (pour un m assez grand, par exemple 1 000 000). Il cherche ensuite si $(x/m)^2 + (y/m)^2$ est inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire si le point de coordonnées (x, y) est dans un cercle de rayon m. Il répète ces opérations un grand nombre de fois. La proportion de couples d'entiers satisfaisant l'inégalité s'approche progressivement de π/4, ce qui donne une mesure de π.

Cette méthode présente plusieurs défauts :

- même en effectuant un très grand nombre de calculs, la proportion ne converge pas vraiment vers π, mais vers une valeur approchée de π (pour qu'elle converge vraiment vers π, il faudrait augmenter peu à peu le nombre m).
- elle s'appuie sur la fonction *random* du langage de programmation ; or celle-ci ne n'est jamais une vraie fonction aléatoire *(voir le chapitre 10)*.
- elle converge très lentement.

La même méthode avec des dés pour faire les tirages au hasard et en prenant soin d'augmenter m ne reposerait ni sur l'hypothèse que notre espace est euclidien, ni sur l'hypothèse (toujours fausse) que le générateur aléatoire de l'ordinateur est bon. Elle exigerait cependant que les dés soient parfaits et que le mélange des dés avant les lancers soit également parfait.

Toutes ces méthodes, même après qu'on les a rendues indépendantes des générateurs aléatoires ou de l'hypothèse que l'espace est euclidien, conservent un grave défaut : elles convergent encore plus lentement que la définition arithmétique de π donnée précédemment. On ne saurait les recommander !

Les aiguilles de Buffon : π sur le parquet

Le naturaliste français Georges Louis Leclerc , comte de Buffon (1707-1788), est l'auteur d'un traité en quinze volumes, intitulé *Histoire naturelle générale et particulière* ; il fut un mémorable intendant du Jardin du Roi, ancêtre du Jardin des Plantes, mais il est aussi célèbre pour ses aiguilles.

Buffon montra que la probabilité qu'une aiguille de longueur L, lancée sur un parquet dont les lattes ont une largeur L, coupe le bord d'une latte est $2/\pi$. Dans le cas général, pour une aiguille de longueur a et des lattes de largeur b, la probabilité est $2a/b\pi$ *(voir page 18)*.

Le résultat se généralise avec des aiguilles tordues, pourvu que la longueur de l'aiguille reste la même. Dans ce cas, une aiguille peut couper plusieurs fois un même bord, et il faut tenir compte de cette possibilité pour énoncer le résultat qui devient : le nombre moyen d'intersections par aiguille lancée tend vers $2a/b\pi$.

La méthode de Buffon dépend de l'hypothèse que l'espace physique est euclidien et malheureusement, comme avec les méthodes de Monte-Carlo, l'efficacité est très mauvaise. On a calculé que pour obtenir une précision de 1/1 000 avec une probabilité de 95 pour cent, il faudrait lancer 900 000 aiguilles environ.

Des expériences ont prétendument été réalisées pour mesurer π par la méthode de Buffon :

• en 1850, Wolf lance 5 000 aiguilles avec un rapport $a/b = 0{,}8$ et trouve 2 532 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}1596$.

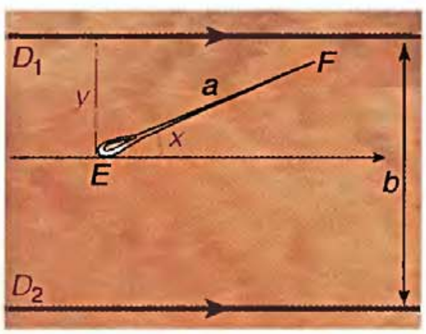
• en 1855, Smith d'Aberdeen lance 3 204 aiguilles avec un rapport $a/b = 0{,}6$ et trouve 1 218,5 intersections (les demi-intersections correspondent aux cas ambigus) ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}1553$.

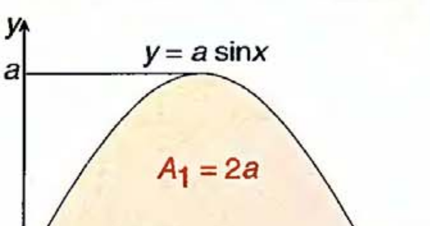
• en 1860, Augustus De Morgan lance 600 aiguilles avec un rapport $a/b = 1$ et trouve 382,5 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}137$.

La méthode de Buffon pour évaluer π. Si l'on lance des aiguilles de longueur a sur un parquet dont les lattes ont une largeur b, la probabilité qu'une aiguille coupe le bord d'une latte est égale à $2a/b\pi$.

• en 1864, le capitaine Fox lance 1 030 aiguilles avec un rapport $a/b = 0{,}75$ et trouve 489 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}1595$.
• en 1901, Lozzerini lance 3 404 aiguilles avec un rapport $a/b = 0{,}83$ et trouve 1808 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}1415929$.
• enfin, en 1925, Reina lance 2 520 aiguilles avec un rapport $a/b = 0{,}5419$ et trouve 859 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi = 3{,}1795$.

Pour railler ceux qui prétendent déterminer π avec ce type d'expériences, et qui arrangent parfois leurs résultats (le résultat de Lozzerini est trop beau pour être vrai), N. Gridgeman proposa d'utiliser des aiguilles de taille adaptée. En prenant par exemple $a = 78{,}5398$ centimètres et $b = 1$ mètre, la probabilité donnée par la formule de Buffon est $2 \times 0{,}785398/\pi$: en lançant seulement deux aiguilles, si l'une coupe le bord d'une lame et pas l'autre, on obtient un score de 1/2, d'où l'on tire l'approximation de $\pi = 4 \times 0{,}785398 = 3{,}141592$, ce qui n'est pas mal !





Modélisation du problème de Buffon. L'extrémité E de l'aiguille est distante de y de la droite D_1, représentant un bord de la latte, et l'aiguille forme un angle x avec la direction de cette droite. L'aiguille coupe D_1 lorsque y est inférieur à a sin$x$. La surface A_1, correspondant aux cas favorables où $y < a$ sin$x$, est égale à $2a$.

Complément : une intégrale pour prouver Buffon

Le lecteur pressé ou rétif aux intégrales peut sauter ce paragraphe, qui donne la démonstration de la formule de Buffon.

Soit une aiguille de longueur a dont les extrémités sont E et F. On la lance sur un réseau de lignes parallèles écartées régulièrement les unes des autres de b. On suppose que $a < b$ (pour ne pas avoir à considérer les cas où une aiguille coupe plusieurs lignes) et on cherche la probabilité P que l'aiguille coupe l'une des lignes du réseau.

Le point E se situe entre deux droites que nous notons D_1 et D_2. Intéressons-nous à la probabilité P_1 pour que EF coupe D_1. Il faudra ensuite multiplier P_1 par 2 pour obtenir la probabilité recherchée P.

On note x l'angle entre EF et la direction du réseau de droites parallèles orientées, et on note y la distance entre E et la droite orientée D_1. L'angle x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. On voit que l'aiguille coupe D_1 si $y < a \sin x$.

Si l'on considère le plan des positions de l'aiguille (l'ensemble des points de coordonnées x, y), la probabilité recherchée P_1 est le rapport entre l'aire A_1 correspondant aux cas «favorables» d'intersection $\{(x, y) ; -\pi \le x \le +\pi, 0 \le y \le b, y < a \sin x\}$ et l'aire A_2 correspondant à tous les cas possibles $\{(x, y) ; -\pi \le x \le +\pi, 0 \le y \le b\}$. En écrivant cela, on affirme seulement que x est indépendant de y et que toutes les valeurs de x sont également probables, de même que toutes les valeurs de y, ce qui résulte des symétries du problème. L'hypothèse physique sous-jacente est que tous les points et toutes les directions sont équivalents, et qu'ils sont indépendants les uns des autres, ce que la présence de masses proches rend faux dans un univers Newtonien (à cause de l'attraction universelle) ou relativiste (à cause de la déformation de l'espace). Le calcul donne :

$$A_1 = \int_0^{\pi} a \sin x \, dx = -a \cos \pi + a \cos 0 = 2a$$

$$A_2 = 2\pi b$$

D'où $P_1 = a/b\pi$ et finalement : $P = 2a/b\pi$. Lorsque $a = b$, la probabilité que l'aiguille coupe une ligne est $2/\pi = 0{,}636619...$

Pour ceux que la démonstration précédente a rebuté, voici une démonstration très élégante et concise du même résultat, due à Émile Borel. Remarquons d'abord que le nombre moyen d'intersections d'une aiguille de forme quelconque avec les bords des lattes est proportionnel à la longueur L de l'aiguille et inversement proportionnel à la largeur b des lattes. Ce nombre est donc donné par une expression du type CL/b, où C est une constante qu'il faut trouver. Pour cela, considérons une «aiguille» circulaire de diamètre b. Elle a pour longueur πb et, quelle que soit la façon dont elle tombe, coupe exactement deux fois le bord des lattes. D'où $2 = C\pi b / b$, et $C = 2 / \pi$.

Évaluer π en regardant le ciel

Restons avec les probabilités, que nous allons appliquer cette fois à des objets mathématiques plutôt que physiques pour mesurer π : en effet, la probabilité que deux nombres entiers *choisis au hasard* soient premiers entre eux (c'est-à-dire n'aient pas de facteurs premiers communs, comme $12 = 2 \times 2 \times 3$ et $55 = 5 \times 11$) est égale à $6/\pi^2$. Ce résultat est dû au mathématicien Ernesto Cesàro (1859-1906), qui l'a démontré en 1881 *(voir l'appendice à la fin du livre, page 199)*.

Comme le choix d'un nombre entier au hasard n'a pas de sens si l'on ne fixe pas de limite aux entiers envisagés, une formulation plus précise du résultat précédent est nécessaire. La voici : la probabilité p_n que deux nombres entiers inférieurs à n tirés au hasard n'aient pas de facteurs communs est un nombre qui tend vers $6/\pi^2$ quand n tend vers l'infini.

Il y a quelques années, Robert Matthews, de l'Université d'Aston, en Grande-Bretagne, a utilisé des tables de relevés astronomiques et a noté les coordonnées des 100 étoiles les plus brillantes. Il en a déduit des paires d'entiers (qu'il a considérées comme si elles avaient été engendrées au hasard), puis a compté les paires de nombres entiers n'ayant aucun facteur commun. Il en a tiré une approximation de π égale à 3,12772, ce qui est exact à 0,5 pour cent près. Les étoiles connaissent donc π !

π se dissimule dans ce champ d'étoiles, dont la distribution est aléatoire : si l'on fait correspondre à chaque étoile un couple d'entiers (obtenus à partir de ses coordonnées – hauteur et déclinaison – sur la voûte céleste), la probabilité que ces deux nombres soient premiers entre eux (sans diviseurs communs) est égale à $6/\pi^2$.

En appliquant la même méthode (qui s'appuie sur un résultat d'arithmétique ne présupposant pas que l'espace est euclidien), on pourrait associer arbitrairement par deux les numéros gagnants de la Loterie nationale pour calculer une approximation de π qui deviendrait plus précise année après année. De même, la taille des conjoints au sein des couples, mesurée en dixièmes de millimètres, serait la base d'une valeur «matrimoniale» de π. Toutefois, les théorèmes de convergence de la théorie des probabilités indiquent qu'avec de telles méthodes, on ne pourrait guère obtenir en pratique plus de cinq décimales exactes de π.

Pour aller encore un peu plus loin dans l'absurde, envisageons une méthode «autoréférente» de calcul de π. Elle consisterait à découper les décimales connues du nombre π en paquets de huit décimales (par exemple), chaque paquet étant lu comme un nombre entier entre 0 et 99 999 999. En prenant ces nombres par deux et en comptant les paires d'entiers sans facteurs communs, on obtiendrait une évaluation probabiliste de π à partir d'une évaluation exacte de π ! En reprenant le calcul à chaque fois que de nouvelles décimales de π sont calculées et en choisissant des tranches de plus en plus longues, on calculerait ainsi de proche en proche le «π caché dans π» (espérons qu'ils sont égaux !).

Après avoir eu cette idée peu sérieuse, j'ai découvert sur le réseau *Internet* qu'un dénommé Jiang Chuan l'avait déjà envisagée et appliquée, ce qui, avec 1 250 000 décimales de π découpées en tranches de six chiffres, l'avait conduit à l'évaluation $\pi = 3{,}146634$.

L'électricité, les pendules, etc.

D'autres méthodes utilisant l'électricité ou la mesure de la période d'un pendule sont envisageables. Il serait intéressant de distinguer celles qui nécessitent que l'espace physique soit euclidien de celles qui ne dépendent pas de cette hypothèse. Toutefois, avec toutes ces méthodes, même en s'y prenant très soigneusement, il ne faut guère espérer plus de cinq décimales exactes, dix au grand maximum. L'histoire de la connaissance de π n'est pas celle d'expériences de mesure physique de ce genre ; c'est une histoire de mathématiciens, rejoints récemment par les informaticiens.

Deux autres définitions élémentaires de π

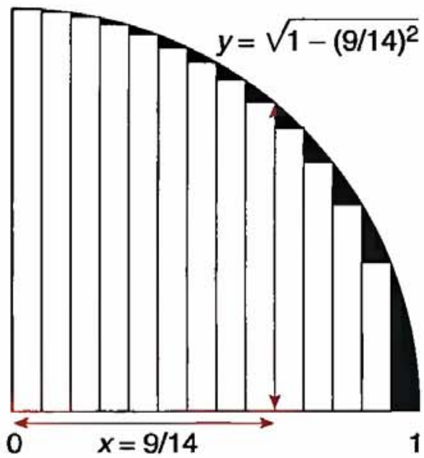
Le fait que π soit transcendant *(voir le chapitre 9)* implique qu'aucune définition *finie* de π ne peut être donnée en termes d'opérations arithmétiques élémentaires (somme, différence, produit, quotient et extraction de racines). Pour atteindre π, il faut nécessairement combiner une infinité d'opérations (ou faire un passage à la limite, ce qui revient au même). Malgré cette contrainte, certaines définitions sont plus élémentaires que d'autres, soit parce qu'elles sont directement reliées aux définitions géométriques de π, soit parce qu'elles conduisent à des approximations de π n'incluant que des opérations très élémentaires.

La définition arithmétique de la page 12,

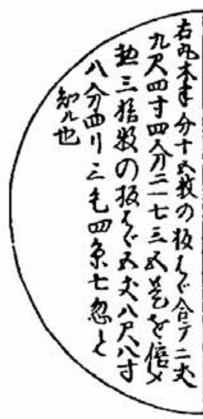
$$s'_n = \frac{8\left(\text{nombre de couples } (x, y) \text{ tels que } 0 \le x \le y \le n \text{ et } x^2+y^2<n^2\right)}{n^2}$$

est à la fois évidente (à cause de son interprétation géométrique) et élémentaire. On peut l'améliorer de deux façons : en la rendant plus efficace, ou en ayant recours à moins d'opérations encore.

Méthode des rectangles avec n = 14



Sawaguchi Kazayuki (1670)



Machinag Ohashi (1687)

π comme limite de surfaces. Cette méthode des rectangles était déjà connue au Japon au XVIIe siècle. On approche la surface du quart de cercle, π/4, à l'aide de n rectangles de surface 1/n × √(1 – (a/n)²), avec 1 ≤ a ≤ n.

(a) π approché par des rectangles.

On trouve une formule plus efficace du point de vue de la convergence en s'appuyant de nouveau sur la définition par la surface $S = \pi r^2$, qu'on évalue cette fois en utilisant le fait que l'arc de cercle a pour équation $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, et en approchant la surface sous l'arc à l'aide de petits rectangles placés à l'intérieur :

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-n^2}\right)$$

Cette formule demande moins d'opérations : pour obtenir une précision de p chiffres décimaux, il faut utiliser $n = 10^p$ et donc faire environ 10^p élévations au carré, soustractions et extractions de racines carrées, suivies d'une multiplication par 4 et d'une division. C'est mieux que la formule des s'_n mais, là encore, on ne peut guère aller très loin dans le calcul de π.

Au chapitre 4, qui traite de l'histoire de l'analyse, on trouvera d'autres formules de limite donnant π, souvent plus simples à calculer et plus efficaces, mais moins évidentes.

(b) π par des additions, une seule multiplication et une seule division.

Le calcul de s'_n n'utilise que des élévations au carré, des additions, un décompte, une multiplication par 8 et une division. Il est possible de faire encore mieux du point de vue de la simplicité des opérations mises en œuvre pour calculer π.

En n'utilisant que des additions, une multiplication et une division, on obtient en effet des approximations de π aussi bonnes que l'on veut. Voici, sans preuve, cette méthode proposée par G. Kreweras en 1980.

Les nombres contenus dans ce tableau offrent un moyen de calculer π. On remplit le tableau ligne à ligne en ne faisant que des additions : le coefficient de la ligne *n* dans la colonne *m* vaut la somme des *m* derniers coefficients de la ligne $n-1$. Par exemple, $e(5, 4) = 16$ *(en rouge)*. Le double du rapport de deux éléments consécutifs de la diagonale du tableau (les nombres d'Euler), multiplié par le numéro de la ligne du deuxième élément, constitue une approximation de π. Par exemple, en considérant les lignes 8 et 9, on a $2 \times 9 \times 1385 / 7936 = 3{,}1413$.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	2	2						
4	0	2	4	5	5					
5	0	5	10	14	16	16				
6	0	16	32	46	56	61	61			
7	0	61	122	178	224	256	272	272		
8	0	272	544	800	1024	1202	1324	1385	1385	
9	0	1385	2770	4094	5296	6320	7120	7664	7936	7936

On définit les coefficients $e(n, m)$, $m \leq n$, par un tableau triangulaire en indiquant que $e(0, 0) = 1$ et que $e(n, m)$, le coefficient de la ligne n dans la colonne m, vaut la somme des m derniers coefficients de la ligne précédente :

$e(0,0) = 1$ et pour $n \geq 1, n \geq m$:

$$e(n,m) = e(n-1, n-1) + e(n-1, n-2) + \ldots + e(n-1, n-m)$$

Remplir ce tableau ne demande que des additions. Les nombres $e(n, n)$ sur la diagonale sont appelés nombres d'Euler (attention : d'autres définitions des nombres d'Euler sont parfois utilisées).

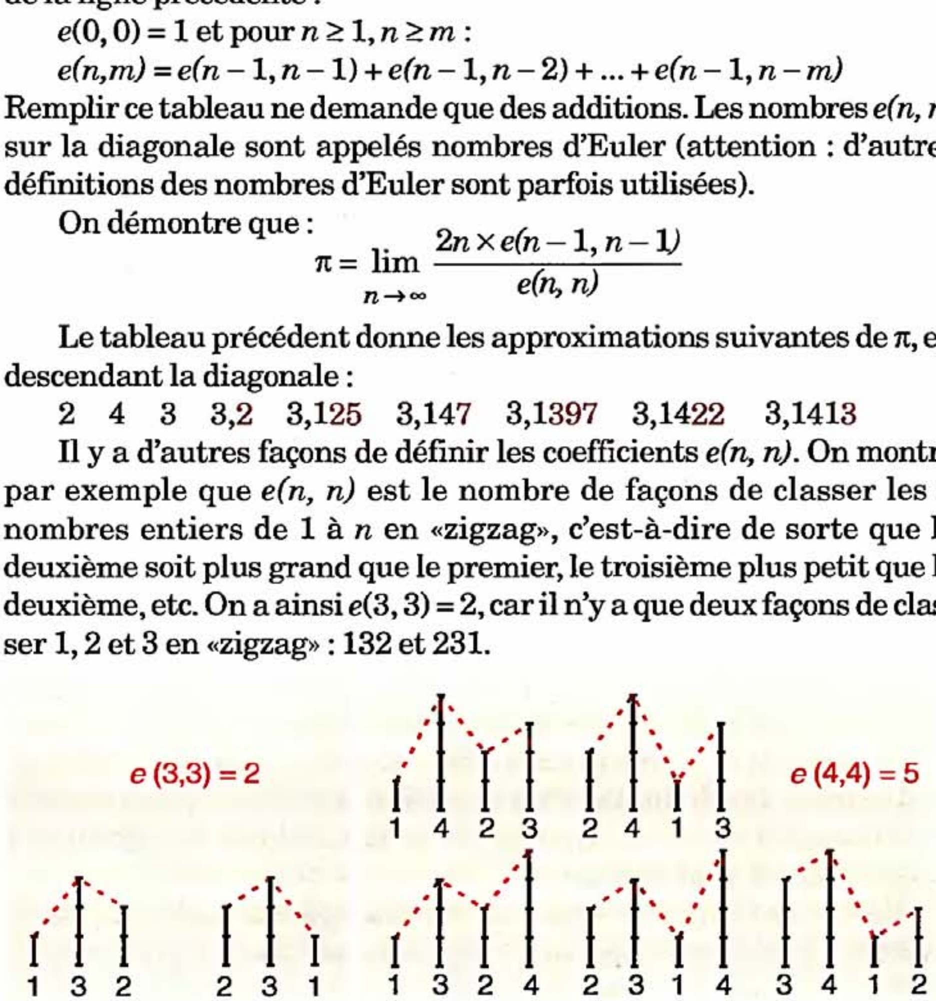
On démontre que :

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{2n \times e(n-1, n-1)}{e(n, n)}$$

Le tableau précédent donne les approximations suivantes de π, en descendant la diagonale :

2 4 3 3,2 3,125 3,147 3,1397 3,1422 3,1413

Il y a d'autres façons de définir les coefficients $e(n, n)$. On montre par exemple que $e(n, n)$ est le nombre de façons de classer les n nombres entiers de 1 à n en «zigzag», c'est-à-dire de sorte que le deuxième soit plus grand que le premier, le troisième plus petit que le deuxième, etc. On a ainsi $e(3, 3) = 2$, car il n'y a que deux façons de classer 1, 2 et 3 en «zigzag» : 132 et 231.



On peut calculer π par de simples dénombrements. Soit deux séries consécutives d'entiers (1, 2, ..., n–1) et (1, 2, ..., n). Les nombres d'Euler $e(n–1, n–1)$ et $e(n, n)$ correspondent au nombre de façons de classer les termes de ces séries en «zigzag». Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $2n \times e(n-1, n-1) / e(n, n)$ tend vers π. Ici, il y a deux façons de classer la série 123 en zigzag, et cinq façons de classer la série 1234. En multipliant ce rapport 2/5 par 4 (la taille de la deuxième série) puis par 2, on obtient une approximation de π, 16/5 = 3,2.

Curieux et curiosités

Intrigues et amusements autour de π

2

Le nombre π fascine tout le monde, mais certains d'entre nous le sont à un point tel qu'on doit alors parler de «fétichisme de π», ou même de «π-manie» (ne faut-il pas en être atteint pour passer plusieurs mois de sa vie à écrire un livre sur π ?). Les obsédés de π, ceux qui lui attribuent une importance presque mystique, sont en réalité assez nombreux, et le monde qu'ils ont construit autour de π, s'il n'est pas toujours très sérieux, se visite avec plaisir : il y a ceux qui apprennent π par cœur ; il y a ceux qui veulent lire dans π et qui en scrutent les décimales ; il y a bien sûr tous ceux qui, depuis plus de 2 000 ans, recherchent et prétendent avoir trouvé la solution du problème de la quadrature du cercle ; enfin il y a ceux qui, tout simplement, s'amusent avec π.

Apprendre π

Tout le monde connaît $\pi = 3{,}14$, certains connaissent $\pi = 3{,}14159$ ou même $\pi = 3{,}1415926$ (c'était mon cas avant d'entreprendre ce livre). Le «$\pi = 3{,}1416$» que l'on prononce «trois quatorze cent seize» est à éviter absolument, car il conduit à l'erreur $\pi = 3{,}14116$. Peut-on aller plus loin ? Nous verrons dans la suite que π n'est pas un nombre rationnel (quotient de deux entiers) ; par conséquent, ce n'est pas non plus un nombre décimal (quotient d'un entier par une puissance de dix), et l'écriture de π en base 10 ne s'arrête jamais : π possède une infinité de décimales.

Certaines personnes, sans qu'on sache pourquoi, mémorisent sans difficulté les nombres et les numéros de téléphone. Il est tentant pour eux d'apprendre quelques dizaines, quelques centaines, voire quelques milliers de décimales de π.

Le record de mémorisation des décimales de π est de 42 000. Il est détenu depuis 1995 par un Japonais de 21 ans, Hiroyuki Goto. Réciter ces 42 000 décimales lui demande neuf heures. Le précédent record était détenu par un autre Japonais, Hideaki Tomoyori, qui avait réussi à mémoriser 15 151 décimales de π en 1979.

Il existe sur *Internet* un club des gens qui connaissent plus de mille décimales de π. Il comporte 16 membres. Il existe aussi un club pour les gens plus modestes qui connaissent 100 décimales de π *(l'adresse est indiquée à la fin du livre)*.

À vrai dire, les informations sur ce sujet sont peu fiables, et celles qu'on trouve sur le réseau *Internet* semblent pour le moins incomplètes : ainsi les deux Japonais précités ne font pas partie du club des gens connaissant 1 000 décimales de π.

Tim Morton, chauffeur de taxi dans la station balnéaire de Blackpool, en Grande-Bretagne, avait appris 15 000 numéros de téléphone de la ville pour se produire en spectacle. Il a récemment décidé de battre le record du monde de mémorisation des décimales de π. Sa mémoire extraordinaire des nombres et les procédés mnémotechniques qu'il a mis au point devraient lui permettre d'atteindre 50 000 décimales.

Moyens mnémotechniques

Toutes sortes de techniques (souvent fondées sur des associations phonétiques) sont à la disposition de ceux qui veulent connaître par cœur les décimales de π. La méthode la plus utilisée consiste à apprendre un texte dont les mots ont pour nombre de lettres les chiffres qu'il faut mémoriser. De tels textes existent dans de nombreuses langues. Voici d'abord le plus connu en français, qui a la forme d'un quatrain :

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
8 9 7 9
qui de ton jugement peut priser la valeur
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi ton problème eut de sérieux avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

Ce poème donne 31 décimales de π. Les deux chiffres suivants sont 5 et 0. Comment faire pour coder «0» ? Dans la variante ci-dessous, on a convenu que les mots de dix lettres représentent le chiffre 0.

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Glorieux Archimède, artiste, ingénieur,
8 9 7 9
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
3 2 3 8 4 6 2 6

Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
4 3 3 8 3 2 7 9
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
5 0 2 8 8
Tout l' admirable procédé, l' œuvre grandiose
4 1 9 7 1 6 9
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
3 9 9 3 7 5
O quadrature ! vieux tourment du Philosophe !
1 0 5 8 2 0
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
9 7 4 9 4 4
Défié Pythagore et ses imitateurs.
5 9 2 3 0
Comment intégrer l' espace plan circulaire ?
7 8 1 6 4 0
Former un triangle auquel il équivaudra ?
6 2 8 6 2 0
Nouvelle invention : Archimède inscrira
8 9 9 8
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
6 2 8 0 3 4
Fonction du rayon. Pas trop ne s' y tiendra :
8 2 5 3 4 2 1 1 7
Dédoublera chaque élément antérieur ;
0 6 7 9
Toujours de l' orbe calculée approchera ;
8 2 1 4 8 0
Définira limite ; enfin, l' arc, le limiteur
8 6 5 1 3 2 8
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle !
2 3 0 6 6 4 7
Professeur, enseignez son problème avec zèle !...
0 9 3 8 4 4

Pour $1/\pi = 0{,}3183098...$, il y a la phrase astucieuse :
«Les trois journées de 1830 ont renversé 89».

Phrases anglaises :
May I have a large container of coffee.
ou encore :
How I want a drink alcoholic of course
After the heavy chapters involving
Quantum Mechanics

De Joseph Shipley (1960) :
But a time I spent wandering in bloomy night;
Yon tower, tinkling chimewise, loftily opportune.
Out, up, and together came sudden to Sunday rite,
The one solemnly off to correct plenilune.

Phrases allemandes :
Wie? O! Dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh !
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein !
Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie !
Wie viele Tausende bewundern Geister
Himmlisch wie du und göttlich !
Noch reiner in Aeonen
Wird das uns strahlen,
Wie im lichten Morgenrot !

En Breton (de Leslie Sitet) :
Piv a zebr a-walc'h dimerc'her ?
Ne lavaro netra, tud Breizh !

En Espagnol :
Con 1 palo y 5 ladrillos
se pueden hacer mil cosas

L'histoire autoréférencielle de Michael Keith (voir ci-contre) :

En 1986, Michael Keith a proposé un texte autoréférenciel où il utilise les conventions habituelles, qu'il précise un peu : les signes de ponctuation représentent des zéros, sauf le point qui ne représente rien. Les mots de plus de dix lettres représentent deux chiffres à la fois ; par exemple, «implementable», qui a 13 lettres, représente «1 3». Un numéral se représente lui-même (abuser de cette possibilité, qui ne sert ici qu'une fois, serait bien sûr une forme de tricherie qui enlèverait tout intérêt au jeu). Apprendre ce poème astucieux vous fera connaître 402 décimales de π (et un peu d'anglais).

Exercices oulipiens

Quelque temps après, en décembre 1995, le même Michael Keith a composé un poème encore plus long en s'imposant les mêmes contraintes. Son poème, qui semble un record, donne cette fois 740 décimales de π et imite un texte d'Edgar Poe.

Ce genre d'exercices doit être rattaché à ceux de l'*Ouvroir de littérature potentielle* (l'Oulipo), un mouvement artistique réunissant des scientifiques et des écrivains qui exploitent la combinatoire du langage et les rapports que l'on peut trouver ou établir volontairement entre

Circle digits : a self referential story
par Michael Keith

For a time I stood
pondering on circle sizes. The
large computer mainframe quietly
processed all of its assembly code. Inside my entire
hope lay for figuring out an elusive expansion. Value : pi.
Decimals expected soon. I nervously entered a format procedure.
The mainframe processed the request. Error. I, again entering it,
carefully retyped. This iteration gave zero error printouts in all – success.
Intently I waited. Soon, roused by thoughts within me, appeared narrative
mnemonics relating digits to verbiage ! The idea appeared to exist but only in
abbreviated fashion – little phrases typically. Pressing on I then resolved, deciding
firmly about a sum of decimals to use – likely around four hundred, presuming the
computer code soon halted ! Pondering these ideas, words appealed to me. But a
problem of zeros did exist. Pondering more, solution subsequently appeared. Zero
suggests a punctuation element. Very novel! My thoughts were culminated. No periods, I
concluded. All residual marks of punctuation = zeros. First digit expansion answer then came
before me. On examining some problems unhappily arose. That imbecilic bug! The printout I
possessed showed four nine as foremost decimals. Manifestly troubling. Totally every number
looked wrong. Repairing the bug took much effort. A pi mnemonic with letters truly seemed
good. Counting of all the letters probably should suffice. Reaching for a record would be
helpful. Consequently, I continued, expecting a good final answer from computer. First
number slowly displayed on the flat screen –3. Good. Trailing digits apparently were right
also. Now my memory scheme must probably be implementable. The technique was
chosen, elegant in scheme : by self reference a tale mnemonically helpful was
ensured. An able title suddenly existed – «Circle Digits». Taking pen I began.
Words emanated uneasily. I desired more synonyms. Speedily I found my
(alongside me) Thesaurus. Rogets is probably an essential in doing this,
instantly I decided. I wrote and erased more. The Rogets clearly
assisted immensely. My story proceeded (how lovely!) faultlessly.
The end, above all, would soon joyfully overtake. So, this
memory helper story is incontestably complete. Soon I
will locate publisher. There a narrative will I
trust immediatley appear producing
fame. The end.

mathématiques et littérature. L'un de leurs jeux préférés est le palindrome : une phrase ou un texte qui reste identique quand on inverse l'ordre de ses lettres. Georges Pérec en a écrit un de plus de 5 000 lettres qui commence par : «Trace l'inégal palindrome n...» et se termine bien sûr par «...ne mord ni la plage ni l'écart». Parmi les œuvres les plus remarquables de l'Oulipo, il faut citer le plus long livre du monde, *Cent mille milliards de poèmes* de Raymond Queneau, qui ne comporte pourtant que dix pages : chaque page est découpée en 14 lamelles horizontales qui peuvent être lues indépendamment les unes de autres, ce qui (potentiellement) représente bien cent mille milliards de poèmes. Le lipogramme (texte que l'on écrit en s'interdisant d'employer certaines lettres) a conduit au roman sans «e» de Pérec intitulé *La disparition*, qui, chose étonnante, a été traduit en anglais sous le titre *A Void* par Gilbert Adair.

Outre Pérec et Queneau, les membres les plus connus de l'Oulipo, vivants ou défunts, sont : Paul Braffort, Jacques Roubaud, Marcel Benabou, Jacques Bens, Claude Berge (mathématicien, spécialiste mondialement connu de la théorie des graphes) et François Le Lionnais. Il était inconcevable que l'Oulipo ne s'intéresse pas à π ; aussi Jacques Bens a proposé la notion de *sonnet irrationnel* qui doit sa définition à π : c'est un poème à forme fixe dont la structure s'appuie sur les décimales de π. Le poème est divisé en cinq strophes composées respectivement de trois vers, un vers, quatre vers, un vers, cinq vers. Les rimes doivent respecter un schéma conforme à la tradition de la poésie française. L'exemple suivant, dû à Jacques Bens, illustre cette contrainte.

Poème irrationnel

Le presbytère n'a rien perdu de son charme,
Ni le jardin de cet éclat qui vous désarme
Rendant la main aux chiens, la bride à l'étalon :

Mais cette explication ne vaut pas ce mystère.

Foin des lumières qui vous brisent le talon,
Des raisonnements qui, dissipant votre alarme,
Se coiffent bêtement d'un chapeau de gendarme,
Désignant là le juste, et ici le félon.

Aucune explication ne rachète un mystère.

J'aime mieux les charmes passés du presbytère
Et l'éclat emprunté d'un célèbre jardin ;
J'aime mieux les frissons (c'est dans mon caractère)
De tel petit larron que la crainte oblitère,
Qu'évidentes et sues les lampes d'Aladin.

Notons que la contrainte n'est pas très forte, et même décevante, car elle ne tient aucun compte du fait que π a une infinité de décimales.

Dans sa classification des genres de littérature oulipienne, Pérec indique les poèmes mnémotechniques suivants que Monsieur Cros, professeur de Marcel Pagnol, faisait apprendre à ses élèves :

Si la circonférence est fière
D'être égale a deux pierres
Le cercle est tout heureux
D'être égal à Pierre II.

Le volume de toute Terre
De toute sphère
Qu'elle soit de pierre ou de bois
Est égale à quatre tiers de pi R trois

Ces poèmes sont classés juste après «Que j'aime à faire...» dans le genre de la *Série* («texte qui contient une séquence obligée d'éléments préalablement établis») et dans la variété des *applications codées*.

Les chiffres de π et la musique

Il semble que l'on doive classer les travaux de composition musicale à partir de π dans la même catégorie des *Séries-applications codées.*

À première vue, si π est *normal* (c'est-à-dire si chaque séquence apparaît avec la même fréquence que si on tirait les décimales au hasard, ce que les tests effectués jusqu'à présent semblent indiquer), il

Harmonisation de π (III) pour guitare acoustique. Cette partition de Jean-Philippe Fontanille est fondée sur les chiffres de π écrit en base 7 *(égal à 3,06636.., voir p. 212)*, qui renvoient aux 7 notes de la gamme. Chaque chiffre impose la fondamentale de l'accord, qui doit être utilisé durant une mesure ou moins. La nature de l'accord (majeur ou mineur), ses altérations et compléments (7^e^, 9^e^, etc.) et la mélodie sont laissés au choix du compositeur. J.-P. Fontanille a proposé trois harmonisations de π (toutes agréables à écouter) ; il voit dans la contrainte imposée par les chiffres de π l'occasion de découvrir des enchaînements d'accords qu'il juge inhabituels.

n'y a rien à en attendre sur le plan musical. On peut rétorquer que même si π est normal, cela n'empêche en rien ses premiers chiffres d'être «spéciaux» et musicalement intéressants. De toute façon, les recherches de régularité ou de motifs dans les décimales de π, qui jusqu'à aujourd'hui n'ont rien donné, ne seront jamais exhaustives : pourquoi ne pas considérer la composition de morceaux de musique avec π comme une méthode d'étude et d'exploration de π qui, à l'inverse des méthodes statistiques fondées sur de simples calculs, sollicite l'intuition et le sens esthétique humain, que l'on espère plus puissants ?

Bien que les mathématiciens soient un peu sceptiques et tentés de penser que c'est le talent du compositeur qui donne de l'intérêt à la musique obtenue, ils ne sont pas en position de se moquer, eux qui n'ont pas réussi à démontrer quoi que ce soit d'important sur ces décimales depuis 1761 (lorsque Lambert a établi que π était irrationnel, c'est-à-dire ne se terminait pas par une séquence répétée telle que 123123123...).

Notons que si π présente vraiment un intérêt musical, nous aurons du mal à le goûter entièrement : en effet, si chaque chiffre fournit une seconde de musique, alors les 51 milliards de décimales dont on dispose à l'heure actuelle donneront un morceau d'une durée de plus de 1 600 ans !

Votre anniversaire dans π

L'idée que l'on peut trouver n'importe quelle combinaison de chiffres dans les décimales de π à condition d'aller la chercher assez loin *(voir le chapitre 10 où cette question est traitée en détail)* a conduit à la mise au point de programmes qui recherchent votre date d'anniversaire ou votre numéro de téléphone dans π. J'en ai utilisé un qui m'a indiqué que la séquence 7777777 est présente une première fois à partir de la décimale 3 346 229, et une deuxième fois à partir de la décimale 3 775 288.

En philosophie des mathématiques, les intuitionnistes ont régulièrement utilisé les décimales de π pour exposer leur conception *constructiviste* des objets mathématiques, qui sont pour eux avant tout des objets mentaux. Ils ont ainsi affirmé qu'avant d'avoir découvert sept «7» consécutifs dans les décimales de π, personne ne doit soutenir, comme on est naturellement tenté de le faire, que ou bien la séquence 7777777 est présente dans la suite infinie des décimales de π, ou bien elle n'y est pas.

Pour les intuitionnistes, c'est nous qui construisons π, et le principe du *tiers exclu* (qui affirme que toute propriété est vraie ou fausse) ne s'applique pas, de même qu'il ne s'applique pas aux personnages de fiction. En effet, personne ne soutient que l'arrière-grand-père de Jean Valjean, ou bien était blond, ou bien ne l'était pas : la question n'a pas de sens du fait que Victor Hugo ne l'évoque pas dans *Les misérables*. Pour un intuitionniste, π est comme l'arrière-grand-père de Jean Valjean : ce qu'on en connaît est vrai, mais ce qu'on en ignore n'est ni vrai, ni faux.

Malgré l'intérêt des mathématiques tirées de l'intuitionnisme et le charme des logiques constructivistes que l'on en déduit, peu de mathématiciens adoptent ce point de vue. On considère plutôt que les décimales de π, connues ou non, existent bel et bien, et que la présence d'une séquence particulière parmi ces décimales est vraie ou fausse, même si aucun humain ne réussit jamais à le savoir ; cela pourrait fort bien être le cas pour certaines séquences, puisqu'on estime qu'on ne connaîtra jamais plus de 10^{77} décimales de π *(voir le chapitre 10)*.

On sait aujourd'hui que la séquence 7777777 est présente dans π, et les constructivistes doivent changer d'exemple ; à moins qu'ils arguent que la séquence a été trouvée par une machine sans qu'aucun humain ne vérifie ce résultat à la main, et qu'en conséquence on ne sait toujours pas si 7777777 est vraiment quelque part dans les décimales de π. La fréquentation et la confiance qu'on accorde naturellement aux ordinateurs rendent les thèses intuitionnistes de plus en plus difficiles à soutenir : pourquoi douter d'un calcul fait par dix méthodes différentes, sur dix machines différentes, programmées de dix façons différentes, plus que d'un calcul fait par un calculateur humain ? Si l'on prend au sérieux cette difficulté de la conception intuitionniste, une solution consiste à soutenir que les constructions mentales des ordinateurs méritent aussi d'être prises en considération.

Quelques coïncidences : doit-on s'en étonner?

Que tout puisse se trouver dans les décimales de π, ce qui n'est pas mathématiquement établi *(voir le chapitre 10)*, ne signifie pas que tout ce qu'on trouve dans π est banal. Voici d'ailleurs quelques étrangetés notées par des amateurs ; on se gardera bien de les prendre au sérieux.

- Le «0» n'apparaît la première fois qu'en position 32 après la virgule, alors que tous les autres chiffres sont déjà représentés au moins une fois dans les 13 premières décimales. Pourquoi ce retard du «0» ?
- Les décimales de π à partir de la 762^e^ sont 999999. Qu'il y ait six «9» consécutifs quelque part dans le premier million de décimales de π ne serait pas étonnant, mais que cela se produise avant la millième décimale, n'est-ce pas troublant ?
- En additionnant les 20 premières décimales de π après la virgule, on trouve 100. Doit-on chercher une explication ?
- En additionnant les 144 premières décimales de π, on trouve 666. Faut-il en conclure que π est satanique ?

• Parmi les 1 000 premiers entiers obtenus en prenant les décimales de π dans l'ordre 3, 31, 314, 3 141, 31 415, ..., seuls quatre sont des nombres premiers. N'est-ce pas vraiment très peu ? (cette information provient du site Internet *The Pi Trivia Game ;* je ne l'ai pas vérifiée !)
• Parmi les 400 premières décimales de π, il n'y a que 24 «7», ce qui est peu par rapport aux 40 «7» attendus *(voir le chapitre 5, pages 80 et 81).*
• Le groupe de trois décimales qui se termine à la position 315 est 315, et celui qui se termine à la position 360 est 360.
• Si, dans l'alphabet écrit en cercle, on colorie les lettres ayant un axe de symétrie vertical (...HIJKLMNOPQRSTUVWXYZABCDEFGH...), les lettres non coloriées forment des groupes de 3, 1, 4, 1 et 6 lettres.
• $(\pi^4 + \pi^5)^{1/6} = 2{,}718281809$, soit la constante e jusqu'à la septième décimale !
• Si l'on prend le carré magique 5 × 5 reproduit ci-dessous (un carré magique est un tableau dont les sommes des lignes et des colonnes sont égales à un même nombre, ici 65) et qu'on remplace chaque nombre n par la décimale de π de rang n («1» est remplacé par «3», «2» est remplacé par «1», «3» est remplacé par «4», etc.), on obtient un tableau dont les sommes des lignes sont les mêmes que les sommes des colonnes, à l'ordre près :

17	24	1	8	15	[65]
23	5	7	14	16	[65]
4	6	13	20	22	[65]
10	12	19	21	3	[65]
11	18	25	2	9	[65]
[65]	[65]	[65]	[65]	[65]	

2	4	3	6	9	[24]
6	5	2	7	3	[23]
1	9	9	4	2	[25]
3	8	8	6	4	[29]
5	3	3	1	5	[17]
[17]	[29]	[25]	[24]	[23]	

• Lorsqu'on calcule π en base 26 et que l'on remplace chaque chiffre par la lettre correspondante de l'alphabet (on change «0» en «a», «1» en «b», etc.), on obtient le texte suivant *(à la fin du livre, page 213, vous trouverez les 2000 premières lettres de ce texte)* :

3,
drsq**lolyrtrodn**lhnqtgkudqg**tuirxne**qbckbs**ziv**qqvgd**melm**
uexroiqiyal**vu**zveb**mijp**qqxlkplrncfw**jp**bymg**gohjm**mqisms
sciekhv**du**tcxt**jp**sbwhuf**om**qja**os**ygpowupymlifsfiizrodpl
yxpe**do**sx**mf**qtqh**mf**xf**pv**zezrkfcwkxhthuh**cple**ml**nu**dtmspwb
b**jf**gsjhncoxzndghkv**oz**rnkwbd**mf**uay**jfoz**xydkaymnquwlyka
ply**bi**zuyb**ro**ujzndd**jm**ojyozsckswpkpadyl**pct**ljd**il**kuuwkq
kwjktz**mel**gcohrbrj**en**rqvhjthd**le**ejvi**fa**fqicqsmt**jf**ppzxz
ohyqlwedfdqjr**nu**hrlmcnkwqjpamv**not**gvyjqnz**mu**cumyvnd**bp**
gmz**va**m**lu**fbrzap**mu**ktsk**bupfa**vlswtw**maet**mved**ci**ujtxmknvx
kdtfgfhq**bankor**npfbgnc**du**kwzpkl**tobemoco**jggxybvoa**et**mh

On remarque :

• des petits mots de deux lettres : *tu*, *ne*, *me* (deux fois), *vu*, *mi*, *go*, *os*, *du* (deux fois), *do*, *le* (deux fois), *nu* (deux fois), *bi*, *en*, *fa* (deux fois), *mu* (deux fois), *va*, *lu*, *bu*, *ma*, *or*, *et* (deux fois), *ci*. Tout cela n'est pas étonnant : le contraire l'aurait été ;
• des mots de trois lettres : *mue*, *roi*, *ban*. La présence du mot *roi* est amusante puisque π est parfois appelé le «nombre roi» ;
• le diminutif *Loly* dans le tout début : voilà un bon prétexte pour baptiser ainsi sa fille ; un surnom plus loin : *moco* ;
• le début du mot *science* à partir de la position 101 (un encouragement à persévérer ?) ;
• le verbe anglais *to be* (vers la position 450), qui évoque irrésistiblement Shakespeare, surtout que *not* et *or* sont aussi présents, permettant de composer la célèbre interrogation métaphysique «to be or not to be ?» ;
• le nom *Ziv*, du mathématicien inventeur d'un algorithme de compression de données très utilisé aujourd'hui ;
• des initiales de sigles divers : *pv*, *om*, *cp*, *pc*, *bp* (il y en a certainement d'autres) ;
• des initiales de prénoms composés : *jp* (trois fois dans les 150 premières lettres, ce qui me rend perplexe), *jm* (deux fois), *mf* (deux fois), *jf* (trois fois) ;
• Jean-Philippe Fontanille me signale les mots *pax*, *lex*, *cil*, *arc*, *rêve* ; il a aussi découvert que le premier mot de cinq lettres est *sexué*, en position 1645.
• et, plus étrange que tout le reste : les lettres en position 11, 12, 13 et 14 sont *rodn*, c'est-à-dire *rond* en permutant les deux dernières lettres : π est autoréférent !

À vous de chercher d'autres mots dans les 2 000 lettres de π indiquées à la fin du livre. Tout ceci ne prouve sans doute qu'une chose : le nombre de coïncidences possibles étant très grand, il s'en produit forcément, comme dans la vie de tous les jours. Même lorsqu'on est averti et que l'on n'est pas dupe, ces coïncidences ne manquent pas de nous intriguer.

Une loi ne peut pas fixer π

En poussant la philosophie intuitionniste des mathématiques à l'extrême, nous serions conduits à croire que nous pouvons choisir π comme bon nous semble, et qu'en conséquence nous pouvons adopter des lois lui assignant une valeur simple. C'est ce qui faillit se passer en 1897. Cette année là, Edward Johnston Goodwin (1828?-1902), médecin à Solitude, dans l'État d'Indiana, aux États-Unis, proposa aux membres de la Chambre des Lois de l'État, un texte de loi où des formules de calcul de surface et de longueur d'arcs étaient données. Ces formules revenaient à décider simultanément que $\pi = 4$; $\pi = 3{,}1604$; $\pi = 3{,}2$ ainsi que $\pi = 3{,}232$ (et aussi $\sqrt{2} = 10/7$).

L'auteur du texte de loi, qui prétendait avoir résolu les problèmes de la quadrature du cercle, de la trisection de l'angle et de la duplication du cube (trois problèmes démontrés insolubles quelques années auparavant), faisait preuve d'une générosité remarquable et d'un civisme tout à son honneur : si la loi était adoptée, il offrait à l'État d'Indiana le droit d'utiliser gratuitement ses découvertes et de les publier dans les livres de classe de l'État (il était sous-entendu que les autres États auraient quelque chose à lui reverser). Goodwin avait réussi à publier deux courts articles tout aussi étonnants dans la revue *The American Mathematical Monthly* qui existait depuis peu et qui, à la recherche de textes, acceptait alors des articles sans contrôle (ce qui n'est plus le cas aujourd'hui). Cette revue, devenue l'une des plus importantes en mathématiques (c'est elle qui est le plus souvent citée dans la bibliographie à la fin de cet ouvrage), ne doit pas être très fière de ses premiers numéros !

La loi passa plusieurs fois en lecture et fut sur le point d'être adoptée, mais fut repoussée au dernier moment, non parce que la proposition avait été jugée absurde, fausse ou contradictoire, mais parce que les législateurs considéraient qu'une loi ne devait pas intervenir dans le domaine scientifique. Ce dénouement est heureux : comme le texte assignait différentes valeurs à π, on aurait pu *légalement* en déduire par quelques transformations algébriques que $1 = 0$, ce qui n'aurait pas manqué de créer des difficultés en matière de transactions financières et aurait ouvert la porte à de belles escroqueries.

Les lois françaises de la Cinquième République sont plus prudentes : bien qu'elles mentionnent π dans le décret du 3 mai 1961, en indiquant que l'unité légale pour les angles est le radian et qu'un tour vaut 2π radians, elles ne proposent aucune valeur pour π, sans doute censé être connu de tous.

Folie de la quadrature et des approximations

Goodwin ne fut pas, loin de là, le seul géomètre amateur à croire qu'il avait trouvé la quadrature du cercle. Ce problème consiste à construire à la règle et au compas un carré de même surface qu'un cercle donné *(voir les chapitres 3 et 9)*, ce qui revient à construire un segment de longueur π à partir d'un segment de longueur 1. De l'Antiquité au XX^e siècle, les amateurs ambitieux furent innombrables à s'éprendre du problème et à se persuader qu'ils avaient découvert la solution.

Dès le IV^e siècle avant notre ère, dans sa pièce *Les oiseaux*, Aristophane (~445 – ~386) raillait les *quarreurs de cercles*. Toutefois rien n'égale la controverse extraordinaire qui opposa sur ce thème le philosophe anglais Thomas Hobbes et le mathématicien John Wallis *(dont nous reparlerons au chapitre 4)*.

Hobbes, qui avait découvert les plaisirs de la géométrie vers l'âge de 40 ans, était en cette matière aussi passionné qu'incompétent et suffisant : il pensait que son génie universel lui permettrait des découvertes mathématiques de première importance. En 1665, à l'âge de 67 ans, il publia un traité qui renfermait une construction approximative de π, présentée comme une solution exacte du problème de la quadrature du cercle *(une série de telles constructions est donnée pp. 195, 196, 197)*. John Wallis dénonça les erreurs du philosophe, et ce fut le début d'une bataille qui dura jusqu'à la mort de Hobbes, à l'âge de 91 ans. La réponse de Hobbes à la première attaque de Wallis fut une édition anglaise de son ouvrage (d'abord publié en latin) auquel il avait ajouté un appendice intitulé *Six leçons pour le professeur de mathématiques*. Wallis répliqua par un pamphlet intitulé *Punition à infliger à Monsieur Hobbes pour n'avoir pas appris correctement sa leçon*. D'autres publications aux titres si clairs qu'ils dispensaient d'en lire le contenu se succédèrent ainsi aimablement pendant 20 ans.

Hobbes avait au moins l'excuse qu'en son temps l'Académie des sciences de Paris ne refusait pas d'examiner les «solutions» du problème de la quadrature (position qu'elle adopta en 1775, et dont la justification est reproduite ci-après) ; en outre, la transcendance de π n'avait pas encore été démontrée (cela fut accompli par Ferdinand von Lindemann en 1882). Pourtant, il y eut encore des quarreurs de cercle au XX^e siècle, tel Carl Théodore Heisel. En 1931, celui-ci publia aux États-Unis un livre où, parmi de nombreuses autres découvertes époustouflantes, il proposait pour π la valeur 256/81. Nous verrons au prochain chapitre que c'est la valeur utilisée dans le papyrus de Rhind, dont la rédaction remonte au deuxième millénaire avant notre ère : le génie de certains amateurs saute par-dessus les siècles. Heisel utilisait sa valeur de π pour calculer la circonférence de cercles de rayon 1, 2, 3, ... jusqu'à 9 ; découvrant la consistance de ses propositions (due au fait que le π de la formule de la surface est le même que celui de la circonférence et qu'ils ne dépendent pas du rayon), il y voyait «la preuve sans controverse possible» que sa valeur de π était exacte, sans réaliser que s'il avait pris $\pi = 2$, il aurait constaté la même cohérence.

La maladie de ceux qui veulent absolument résoudre la quadrature du cercle s'appelle *morbus cyclometricus*. Elle prit une telle ampleur qu'au XVIII^e siècle, l'Académie des Sciences dût réagir pour ne pas être submergée par les mémoires des prétendants. Pour justifier sa décision, elle publia le texte suivant :


Quadratura Circuli,
Cubatio Sphæræ,
Duplicatio Cubi,

Breviter demonſtrata.

Auct. Tho. Hobbes.

LONDINI:
Excudebat J. C. Sumptibus Andreæ Crooke. 1669.
No. 67

Traité de Thomas Hobbes où le philosophe anglais prétend avoir résolu le problème de la quadrature du cercle, ainsi que deux autres célèbres problèmes posés par les Grecs : la cubature de la sphère et la duplication du cube.

Académie Royale des Sciences de Paris, année 1775.

L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel.

Nous avons cru devoir rendre compte ici des motifs qui l'ont déterminée.

Le problème de la duplication du cube a été célèbre chez les Grecs. On prétend que l'oracle de Delos, consulté par les Athéniens sur les moyens de faire cesser la peste, leur prescrivit de consacrer au Dieu de Delos, un hôtel cubique double de celui qu'on voyait dans son temple. [...]

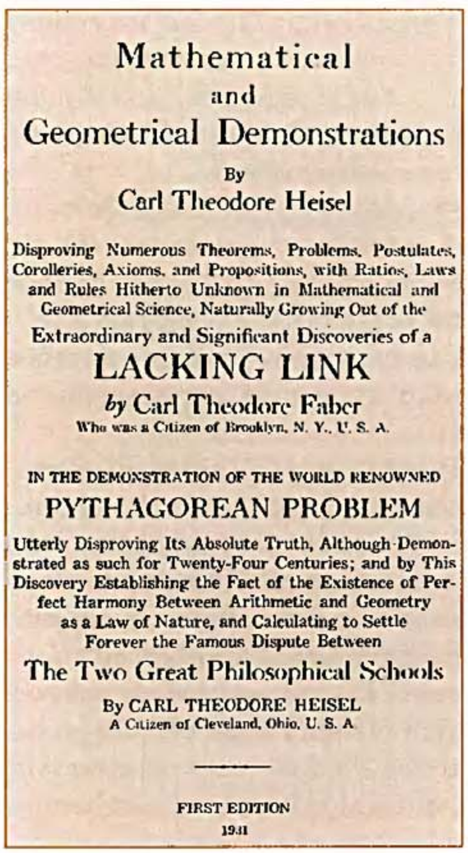
Le problème de la trisection de l'angle fut également célèbre chez les Anciens ; on le résolut d'abord par une construction qui renfermait la description d'une courbe du troisième degré. [...]

Cependant, comme les Anciens ne regardaient comme géométriques que les solutions où l'on n'employait que la ligne droite et le cercle, la règle et le compas, cette expression a fait naître un préjugé, qui règne encore chez des hommes peu éclairés ; ils continuent de s'appliquer à chercher des solutions géométriques de ces problèmes ; les uns, en n'employant que la ligne et le compas, donnent des solutions erronées ; d'autres en donnent de vraies, mais, sans le savoir ils emploient des courbes, et leurs solutions rentrent dans celles qui sont connues : tout examen est donc inutile.

Le problème de la quadrature du cercle est d'un ordre différent : la quadrature de la parabole trouvée par Archimède, celle des lunules d'Hippocrate de Chio, donnèrent des espérances de quarrer le cercle, c'est-à-dire, de connaître la mesure de sa surface : Archimède montra que ce problème, et celui de la rectification du cercle, dépendaient l'un de l'autre, et depuis ils ont été confondus.

On ne connaît que des méthodes d'approximation pour quarrer le cercle, la première est due à Archimède ; un grand nombre de Géomètres célèbres en ont proposé de nouvelles, très ingénieuses, très simples, très commodes dans la pratique ; il est possible encore de perfectionner ces méthodes ; l'Académie n'exclut pas ce genre de recherches ; mais ce ne sont pas des méthodes d'approximations, que prétendent donner ceux qui s'occupent de la quadrature du cercle, ils aspirent à la solution rigoureuse du problème. [...] une expérience de plus de soixante-dix ans, a montré à l'Académie qu'aucun de ceux qui lui envoyaient des solutions de ces problèmes, n'en connaissaient ni la nature ni les difficultés, qu'aucune des méthodes qu'ils employaient n'aurait pu les conduire à la solution quand même elle serait possible. Cette longue expérience a suffi pour convaincre l'Académie du peu d'utilité qu'il résulterait pour les Sciences de l'examen de toutes ces prétendues solutions.

D'autres considérations ont encore déterminé l'Académie. Il existe un bruit populaire que les Gouvernements ont promis des récompenses considérables à celui qui parviendrait à résoudre le problème de la quadrature du cercle ; que ce problème, est l'objet de recherches des Géomètres les plus célèbres. Sur la foi des ces bruits, une foule d'hommes beaucoup plus grande qu'on ne le croit, renonce à des occupations utiles pour se livrer à la recherche de ce problème, souvent sans l'entendre, et toujours sans avoir les connaissances nécessaires pour en tenter la solution avec succès : rien n'était plus propre à les désabuser que la déclaration que l'Académie a jugé devoir faire. Plusieurs avaient le malheur de croire avoir réussi, ils se refusaient aux raisons avec lesquelles les géomètres attaquaient leurs solutions, souvent ils ne pouvaient les entendre, et ils finissaient par les accuser d'envie et de mauvaise foi. Quelquefois leur opiniâtreté a dégénéré en une véritable folie. Tout attachement opiniâtre à une opinion démontrée fausse, s'il s'y joint une occupation perpétuelle du même objet, une impatience violente de la contradiction, est sans doute une véritable folie ; mais on ne la regarde point comme telle, si l'opinion qui forme cette folie ne choque pas les idées connues des hommes, si elle n'influe pas sur la conduite de la vie, si elle ne trouble

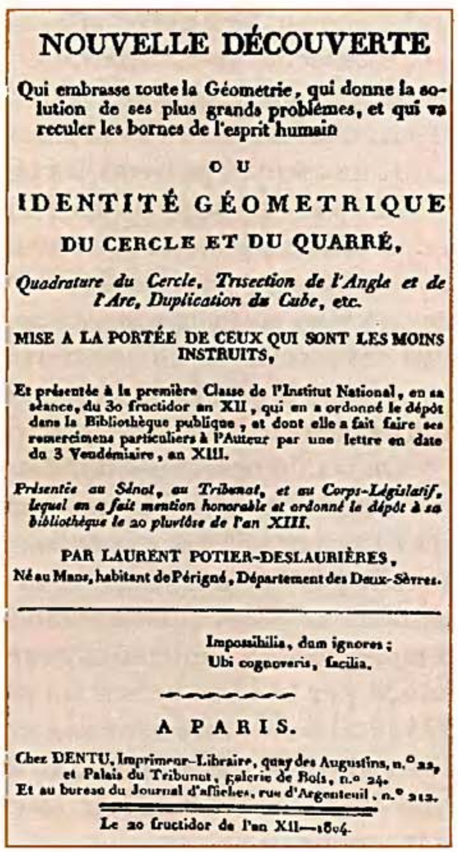


Mathematical
and
Geometrical Demonstrations
By
Carl Theodore Heisel

Disproving Numerous Theorems, Problems, Postulates, Corolleries, Axioms, and Propositions, with Ratios, Laws and Rules Hitherto Unknown in Mathematical and Geometrical Science, Naturally Growing Out of the
Extraordinary and Significant Discoveries of a
LACKING LINK
by Carl Theodore Faber
Who was a Citizen of Brooklyn, N. Y., U. S. A.

IN THE DEMONSTRATION OF THE WORLD RENOWNED
PYTHAGOREAN PROBLEM
Utterly Disproving Its Absolute Truth, Although Demonstrated as such for Twenty-Four Centuries; and by This Discovery Establishing the Fact of the Existence of Perfect Harmony Between Arithmetic and Geometry as a Law of Nature, and Calculating to Settle Forever the Famous Dispute Between
The Two Great Philosophical Schools
By CARL THEODORE HEISEL
A Citizen of Cleveland, Ohio, U. S. A

FIRST EDITION
1931



NOUVELLE DÉCOUVERTE

Qui embrasse toute la Géometrie, qui donne la solution de ses plus grands problêmes, et qui va reculer les bornes de l'esprit humain

O U

IDENTITÉ GÉOMETRIQUE
DU CERCLE ET DU QUARRÉ,

Quadrature du Cercle, Trisection de l'Angle et de l'Arc, Duplication du Cube, etc.

MISE A LA PORTÉE DE CEUX QUI SONT LES MOINS INSTRUITS,

Et présentée à la première Classe de l'Institut National, en sa séance, du 30 fructidor an XII, qui en a ordonné le dépôt dans la Bibliothèque publique, et dont elle a fait faire ses remercimens particuliers à l'Auteur par une lettre en date du 3 Vendémiaire, an XIII.

Présentée au Sénat, au Tribunat, et au Corps-Législatif, lequel en a fait mention honorable et ordonné le dépôt à sa bibliothèque le 20 pluviôse de l'an XIII.

PAR LAURENT POTIER-DESLAURIÈRES,
Né au Mans, habitant de Périgné, Département des Deux-Sèvres.

Impossibilia, dum ignores ;
Ubi cognoveris, facilia.

A PARIS.

Chez DENTU, Imprimeur-Libraire, quay des Augustins, n.° 22, et Palais du Tribunat, galerie de Bois, n.° 24.
Et au bureau du Journal d'affiches, rue d'Argenteuil, n.° 212.

Le 20 fructidor de l'an XII—1804.

Deux prétendues solutions au problème de la quadrature du cercle. Bien que l'impossibilité d'une telle quadrature ait été démontrée en 1882, les tentatives de résolution ont continué au XX[e] siècle, comme le prouve le livre de Carl Théodore Heisel.

pas l'ordre et la Société. [...] L'humanité exigeait donc que l'Académie, persuadée de l'inutilité absolue de l'examen qu'elle aurait pu faire des solutions de la quadrature du cercle, cherchât à détruire, par une déclaration publique, des opinions populaires qui ont été funestes à plusieurs familles. [...] La quadrature définie du cercle est le seul des problèmes rejetés par l'Académie, qui puisse donner lieu à des recherches utiles, et si un Géomètre venait à la trouver, la délibération de l'Académie ne ferait qu'augmenter sa gloire, en montrant quelle opinion les Géomètres ont de la difficulté, pour ne pas dire de l'insolubilité du problème.

Un poisson d'avril

On rencontre π en mathématiques, en physique mais pas en biologie. Ce constat étonnant fut le point de départ d'un poisson d'avril dont j'ai appris qu'il avait abusé des personnes très sérieuses. En avril 1995, dans un article d'une page, la revue *Pour la Science* s'est amusée à «rapporter» la découverte d'une équipe de chercheurs norvégiens : ces biologistes avaient identifié dans un chromosome d'un poisson nommé dipneuste une séquence génomique correspondant au nombre π écrit en base 4. La découverte, affirmait l'article, était due aux exceptionnelles capacités de mémorisation d'un étudiant en doctorat qui avait reconnu π dans la suite des lettres *A, C, G, T* de la séquence d'ADN. Il était précisé que les recherches se poursuivaient sur d'autres animaux, et en particulier sur les pieuvres, les pigeons et les piverts.

Souvent, les poissons d'avril posent de vraies questions. Qu'y a-t-il d'invraisemblable et de ridicule à croire que π puisse être inscrit dans le génome d'un poisson ? Pourquoi trouve-t-on normal de rencontrer π en mathématiques dans des domaines qui n'ont rien à voir avec les cercles, et un peu partout en physique (dans une formule concernant la période de balancement d'un pendule, par exemple), et non en biologie ?

On peut proposer des tas d'explications ; on a l'intuition qu'effectivement les choses du monde vivant n'ont pas la *rigidité mathématique* des choses physiques, et que pour cette raison π ne peut pas être codé dans le génome des poissons ni d'aucun animal. Cette explication, comme toutes les autres, semble insatisfaisante. Peut-être un jour comprendra-t-on mieux ce genre de problèmes. À moins qu'on ne finisse par trouver π dans un génome ! En fait, si l'article poisson d'avril n'avait parlé avec une étrange insistance du port de pêche d'Hammerfest et n'avait comporté des tas d'indices suspects comme le nom des auteurs (K. Arp, R. Abbit), nul n'aurait pu avec certitude y voir une farce.

Surprise biologique

K. ARP • R. ABBIT

La séquence des bases du chromosome 3 de dipneuste reproduit en base 4 les chiffres de π.

Que les lois de la physique fassent intervenir des constantes mathématiques n'étonne plus. En revanche, la présence de principes arithmétiques ou géométriques au cœur des organismes biologiques apparaît plus surprenante. Nous avons tous été fascinés par l'enroulement des pétales des fleurs de tournesol ou des écailles des pommes de pin, où apparaissent les termes de la fameuse suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc. Chaque terme de cette suite est la somme des deux précédents, et le rapport de deux termes consécutifs tend à l'infini vers le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$. Moins connu, le cycle de vie des cigales de la moitié orientale des États-Unis qui émergent tous les 13 ans ou tous les 17 ans (13 et 17 sont des nombres premiers) est tout aussi remarquable : S. J. Gould conjecture que cette périodicité non divisible permettrait à ces espèces d'échapper à leurs prédateurs naturels – d'autres insectes –, qui suivent des cycles de deux, trois, quatre ou cinq ans.

La découverte, en janvier de cette année, d'une coïncidence étonnante dans le génome d'un dipneuste *Protopterus aethiopicus* (un poisson osseux d'Afrique qui résiste aux périodes de sécheresse en respirant de l'air) promet d'être plus difficile encore à élucider. L'équipe du Professeur Rod Herring, du Laboratoire de biologie moléculaire de Hammerfest, en Norvège, vient en effet d'identifier sur le chromosome 3 de cet animal une séquence fortement liée à la constante mathématique π. Lorsqu'on écrit la suite des 20 premiers nucléotides du segment du chromosome 3 repéré à Hammerfest, on obtient les lettres *GATCAAGGGCTTTTATATAC* où, comme c'est l'usage, *A* indique l'adénine, *C* la cytosine, *T* la thymine, *G* la guanine. Or, en remplaçant *A* par 0, *C* par 1, *T* par 2, *G* par 3 (cette substitution est suggérée par des considérations biochimiques), on trouve : 3,0210033312222020201, ce qui est l'écriture en base 4 des 20 premiers chiffres du nombre π. Le calcul de : $3 + 2/4^2 + 1/4^3 + 3/4^6 + 3/4^7 + \ldots + 1/4^{19}$ donne $863554413089/274877906944 = 3{,}141592653588304\ldots$, ce qui est exact jusqu'à la douzième décimale. En réalité, ce sont 193 nucléotides consécutifs qui coïncident ainsi avec la plus remarquable des constantes mathématiques.

Vu le nombre de plus en plus grand de séquences génétiques déchiffrées, de telles coïncidences ne sont peut-être pas vraiment inattendues. On est loin de connaître les cinq milliards de nucléotides des chromosomes humains, mais la somme cumulée de toutes les séquences contenues dans les banques de données génétiques du monde double à peu près tous les deux ans et atteint déjà plusieurs milliards de nucléotides. Il n'est pas surprenant que, dans une telle masse de données, des singularités sans signification soient présentes. On peut cependant évaluer que la probabilité de tomber par hasard sur une séquence de 20 nucléotides consécutifs correspondant à π ne devient non négligeable que lorsqu'on dispose d'une longueur de 1 000 milliards de nucléotides. Or on en est loin aujourd'hui, et de toute façon c'est 193 et non pas seulement 20 nucléotides consécutifs qu'on a découverts : le hasard ne peut donc en aucun cas expliquer la coïncidence de Rod Herring.

GATCAAGGGC	*TTTTATATAC*
3021003331	2222020201
CTTAGAATAG	*CAGACAGACT*
1220300203	1030103012
CTATTATGTA	*AAGCGAACGA*
1202202320	0031300130
GCACATTCAA	*ATCAGTAATA*
3101022100	0210320020
TATTCTCGGA	*GACGCAAAAT*
2022121330	3013100002
AATGTGGTTT	*CTAGTGACAG*
0023233222	1203230103
TCTGATATCC	*ACCATTAATA*
2123020211	0110220020
CGTCTAGTAG	*CAAACAGCGC*
1321203203	1000103131
GTGGTCCCAC	*TCTGAGGAGC*
3233211101	2123033031
AGTTCAAGAC	*TGA*
0322100301	230

La suite des 193 nucléotides de l'ADN de dipneuste trouvée sur le chromosome 3 du dipneuste à Hammerfest. La traduction (en remplaçant *A* par 0, *C* par 1, *T* par 2 et *G* par 3) donne le début du développement en base 4 du nombre π.

Rien n'aurait été possible sans la présence dans le laboratoire d'Hammerfest d'un étudiant italien, Salmo Gairdneri, qui est calculateur prodige, et qui en étudiant le chromosome du dipneuste a soudain reconnu la séquence correspondant à π qu'il connaissait par cœur. Lors du premier séquençage de ce morceau de chromosome, le 43e nucléotide ne correspondait pas à celui attendu (on avait trouvé un *G*), ce qui a conduit l'équipe norvégienne à faire une seconde fois le séquençage et à découvrir qu'il y avait une erreur : le 43e nucléotide était un *A*, comme le développement de π le laissait prévoir.

Cette découverte devrait susciter un regain de collaboration entre les mathématiciens purs – qui en général éprouvent peu d'intérêt pour les sciences naturelles – et les biologistes, qui de leur côté trouvent peu d'attraits aux mathématiques formelles. Plutôt que de faire tourner pendant des semaines ou des mois des milliers de machines mises en réseaux pour calculer les décimales de π ou pour factoriser des nombres entiers, ne serait-il pas plus judicieux d'accroître les performances de séquençage des machines utilisées aujourd'hui en biologie moléculaire, et d'aller ensuite explorer les bonnes zones? Une nouvelle façon de faire des mathématiques est sans doute à inventer, qui n'exclurait pas d'aller à la pêche pour trouver d'autres génomes intéressants. Réciproquement, la présence de telles structures mathématiques dans le génome pourrait éclairer la théorie de l'évolution d'une lumière nouvelle.

L'assimilation de l'évolution par sélection naturelle à un processus de calcul, idée déjà exploitée en informatique dans le domaine des algorithmes génétiques, pourrait expliquer la découverte norvégienne. En attendant, on se demande à quoi peut bien servir pour le dipneuste une représentation dans son génome du nombre favori des mathématiciens. Est-ce comme le propose le professeur Ray, d'Édimbourg, parce que la constante l'aide à fabriquer les cellules parfaitement sphériques de son hypophyse, qui avaient déjà frappé les naturalistes au siècle dernier? Ou est-ce, selon la proposition de L. Shol, de Hambourg, parce que les propriétés électriques du dipneuste nécessitent la maîtrise des lois de l'électrostatique qui, chacun le sait, mentionnent souvent π? Un groupe de linguistes lacaniens de l'évolution prétend même que, d'après leur étymologie, les piafs, pics, pies (surtout), pieuvres et autres pigeons présentent cette particularité du génome. ■

Le message dans π de Carl Sagan

Que π soit un message dans un génome, l'avenir nous permettra peut-être de comprendre pourquoi c'est impossible. Se pourrait-il que π lui-même contienne un message ? Dans son roman intitulé *Contact*, paru il y a une dizaine d'années, Carl Sagan – célèbre collaborateur de la NASA récemment disparu – imagine qu'en explorant les chiffres de π, on y repère un message. Voici quelques lignes de ce livre où la découverte sert de conclusion :

«Si quelque chose se trouve au cœur du nombre transcendant, ce quelque chose ne peut avoir été introduit que dès l'origine, dans la géométrie de l'univers. [...] L'anomalie apparaissait nettement en écrivant π en base 11, où il se présente comme une suite de zéros *et de* uns. *[...] Le programme disposa les chiffres selon une matrice. La première ligne était constituée d'une séquence ininterrompue de* zéros *de gauche à droite. La seconde comportait un seul* un, *exactement au milieu, entouré de* zéros *de chaque côté. Au bout de quelques lignes, elle vit s'esquisser, sans erreur possible, la courbe d'un arc composé de* uns. *La figure géométrique élémentaire pleine de promesses se construisit rapidement, ligne par ligne. Arriva enfin la dernière ligne, uniquement composée de* zéros *sauf en son centre, où se trouvait un unique* un. *La ligne suivante n'était faite que de* zéros, *simple partie d'un cadre. Caché dans les motifs alternés, profondément enfoui au cœur du nombre transcendant, il y avait un* cercle parfait, *dont la forme émergeait grâce à des unités dans un champ de néants. L'univers avait un cadre intentionnel, voila ce que disait le cercle. [...] Très haut au-dessus des êtres humains, des dieux et des démons [...] existe une intelligence qui a précédé l'Univers.»*

Sagan, qui donne l'impression que pour lui π est avant tout une constante physique (puisqu'il parle de géométrie de l'Univers) et semble confondre la base 11 et la base 2 (à moins que ce ne soit le traducteur français...), introduit une idée amusante. Toutefois, le message codé dans π qu'il considère comme la preuve «d'une intelligence ayant précédé l'Univers» est bien anodin : si l'intelligence qui a précédé l'Univers n'a que cela à nous communiquer, il va y avoir des déçus. De nombreux mathématiciens sont persuadés que, même sans miracle, ce qu'on peut trouver dans π est bien plus profond et intéressant que le «message» envisagé par le scientifique romancier. D'ailleurs, si π est normal, quelque part dans ses chiffres se trouve réellement le cercle que Sagan imagine. Comme un grand nombre de mathématiciens pensent que π est normal, le fait servant de conclusion au roman ne mérite vraiment l'étonnement que si ce motif arrive tôt dans les chiffres de π, ce que Sagan ne précise pas dans son livre.

Paradoxes impliquant π

À titre d'amusement, voici quelques jeux et paradoxes autour de π.

(1) La corde autour de la Terre

Essayez de répondre immédiatement, sans faire aucun calcul, à la question suivante : Sachant que le périmètre de la Terre est 40 000 kilomètres et qu'une corde a été tendue tout autour de la Terre à l'altitude 0, au niveau de la mer, de combien faut-il rallonger la corde pour qu'elle se trouve à une hauteur de un mètre au-dessus du niveau de la mer tout autour de la Terre ?

(a) 1 mètre	*(b)* 6,28 mètres	*(c)* 314 mètres
(d) 1 kilomètre	*(e)* 3,14 kilomètres	*(f)* 628 kilomètres
(g) 3 142 kilomètres	*(h)* 10 000 kilomètres	

À présent, utilisez la relation $P = 2\pi r$. Aviez-vous trouvé la réponse *b* ? Ce problème est le prototype même du *piège mental* : impressionné par l'immensité de la corde dont il faudrait disposer, notre jugement immédiat (l'intuition ?) nous conduit à croire que la solution doit, elle aussi, faire intervenir des nombres très grands.

(2) Le paradoxe de Bertrand

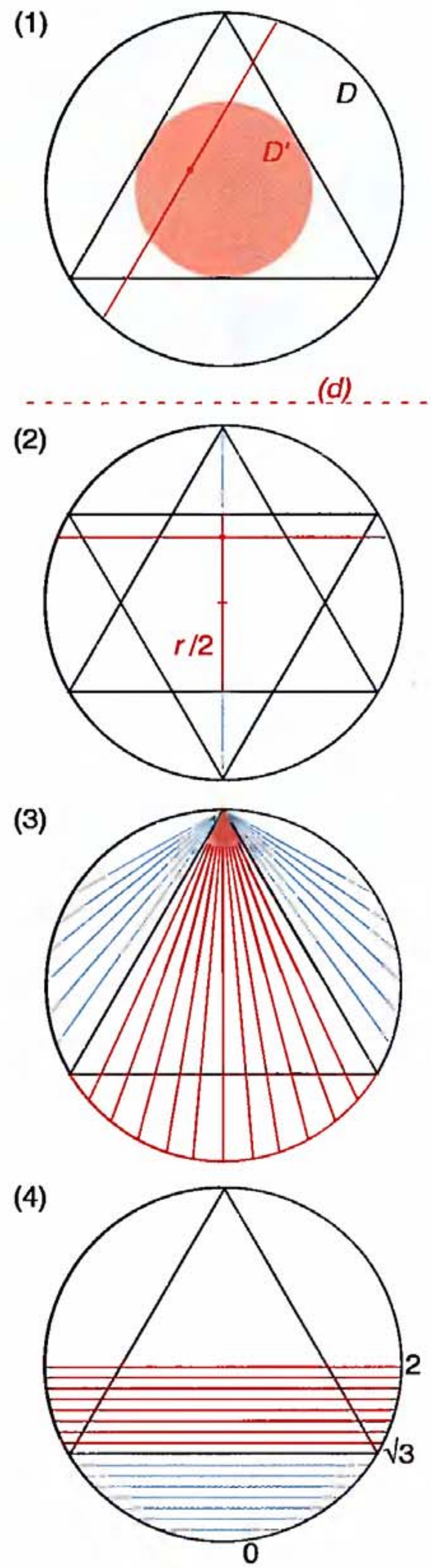
Un cercle C étant donné, quelle est la probabilité P qu'une corde choisie au hasard sur le cercle ait une longueur plus grande que celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

La question étant ainsi formulée, plusieurs raisonnements sont possibles, qui conduisent à des résultats différents illustrés ci-contre.

Réponse 1 : Une corde est déterminée par son centre. Si on prend un centre au hasard, il y a une chance sur quatre qu'il soit dans le disque D' de rayon 1/2 (car la surface de ce disque est $\pi(r/2)^2$, soit 1/4 de celle du disque D de périmètre C). La corde choisie a une longueur plus grande que celle du côté du triangle équilatéral inscrit si et seulement si son centre est dans D'. D'où $P = 1/4$.

Réponse 2 : Une corde est déterminée par l'intersection d'une droite qui coupe C. Prendre au hasard une droite coupant C, c'est choisir une direction *(d)*, puis prendre au hasard une droite parallèle à cette direction et regarder en quel point cette droite coupe le diamètre de C perpendiculaire à *(d)*. Les points correspondant à une longueur de corde supérieure à celle du côté du triangle équilatéral sont ceux des deux quarts centraux du diamètre, ce qui correspond à la moitié de la longueur du diamètre, d'où $P = 1/2$.

Réponse 3 : Déterminer une corde, c'est choisir au hasard un point sur C, puis choisir au hasard un autre point sur C. Quand on choisit le second point, il y a une chance sur trois que la corde résultante soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit dans C (car il y a trois zones possibles, égales en longueur, qui correspondent au découpage de C par les sommets du triangle). D'où $P = 1/3$.



Quatre façons de choisir une corde au hasard sur un cercle.

Réponse 4 : En supposant le cercle C de rayon 1, la longueur du côté du triangle équilatéral est $\sqrt{3} = 1{,}732$... Une corde de C choisie au hasard a une longueur comprise entre 0 et 2, donc la probabilité recherchée est $P = (2 - \sqrt{3})/2 = 0{,}1339$...

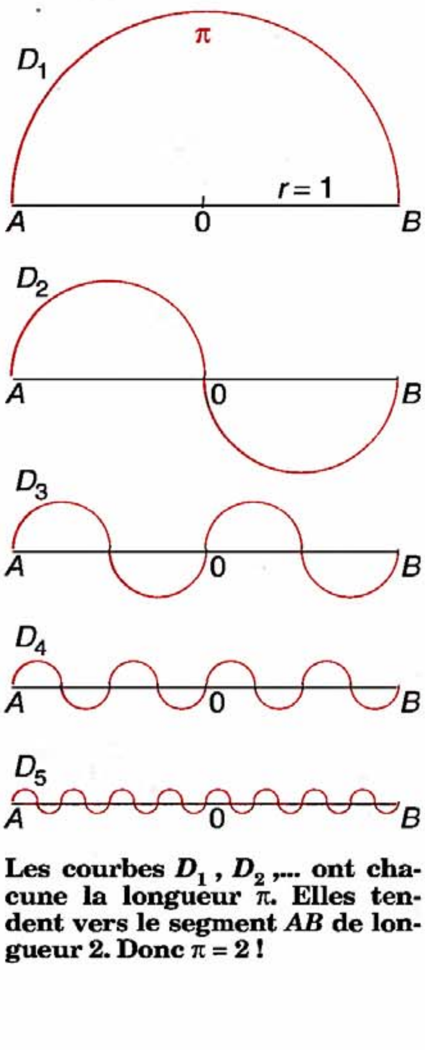
Qu'il puisse y avoir quatre réponses différentes à la même question est paradoxal. Comment s'en sortir ?

En reconnaissant simplement que le problème initial n'est pas posé assez précisément. Le protocole de choix d'une corde n'étant pas défini, la probabilité n'est pas déterminée par l'énoncé du problème. En revanche, si l'on fixe un protocole pour choisir une corde sur le cercle (ce qui revient à choisir l'une des quatre réponses, ou peut-être à en inventer une autre), alors la probabilité est déterminée. Il n'y a aucun paradoxe, seulement un problème incomplètement formulé. Alors que, dans les problèmes de probabilité, il n'y a généralement qu'un seul protocole raisonnablement envisageable, même si l'énoncé est imprécis, ici il y en a plusieurs et c'est ce qui donne l'illusion d'un paradoxe.

(3) Démonstration que $\pi = 2$

Considérons un demi-cercle de rayon 1 joignant deux points A et B. La longueur de l'arc de ce demi-cercle que nous noterons D_1 est π *(voir la figure ci-contre)*.

Considérons maintenant deux demi-cercles de rayon 1/2 construits comme l'indique la figure, et notons cette nouvelle courbe D_2. La longueur de D_2 est toujours π, car le premier demi-cercle a pour longueur $\pi/2$, tout comme le second. On continue ainsi en construisant D_3, D_4, etc. La courbe limite de toutes ces courbes est le segment AB, diamètre de D_1 qui a pour longueur 2. On en conclut que $\pi = 2$.



Les courbes D_1, D_2,... ont chacune la longueur π. Elles tendent vers le segment AB de longueur 2. Donc $\pi = 2$!

Cette solution est fausse parce que *la longueur d'une courbe limite n'est pas la limite des longueurs*. On démontre que la longueur d'une courbe limite (si elle existe, ce qui n'est pas forcément le cas) est toujours inférieure ou égale à la limite des longueurs (là encore si cette limite existe), mais on ne peut pas démontrer l'égalité. Le mathématicien, pour se persuader qu'il ne pourra pas démontrer l'égalité, ne fait d'ailleurs rien d'autre que considérer notre exemple ou un exemple analogue.

Le paradoxe repose sur un passage à la limite injustifié et injustifiable. L'intuition naïve que la courbe limite a toujours pour longueur la limite des longueurs est une intuition erronée.

(4) Démonstration que π est rationnel

Les passages à la limite sont dangereux, nous venons de le voir. En voici un autre exemple. On trouve sur un site *Internet*, dont par charité je tairai l'adresse, la «démonstration» que π est un nombre rationnel, c'est-à-dire quotient de deux nombres entiers. La voici :

Considérons la suite des approximations décimales de π et notons π_n la n-ième approximation décimale de π. On a $\pi_0 = 3$; $\pi_1 = 3{,}1$; $\pi_2 = 3{,}14$; $\pi_3 = 3{,}151$, etc. On raisonne par récurrence :

- π_0 est rationnel, car c'est un entier.
- π_1 est rationnel car c'est 31/10.
- Supposons que π_n est rationnel, de la forme $\pi_n = p/q$ avec $q = 10^n$. En ajoutant le chiffre décimal suivant c, le numérateur devient $10p + c$ et le dénominateur devient $10q$; d'où $\pi_{n+1} = (10p + c)/10q$, ce qui est aussi un nombre rationnel avec un dénominateur de la forme 10^{n+1}.

En appliquant le principe du raisonnement par récurrence, on arrive au résultat que tous les π_n sont rationnels, et donc π. CQFD.

Cette démonstration est certainement fausse, car elle s'applique à tous les nombres réels et donc à $\sqrt{2}$, qui est pourtant connu comme irrationnel depuis plus de 2 000 ans *(voir le raisonnement au chapitre 9, page 146)*. Pourquoi est-elle fausse ? La conclusion du raisonnement par récurrence est que «tous les π_n sont rationnels» (ce qui, soit dit en passant, n'a pas besoin d'être démontré par récurrence car *par définition* les approximations décimales de π sont des nombres rationnels !), mais cela ne permet pas de conclure que π (le nombre limite de la suite des π_n) est rationnel : *être rationnel* n'est pas une propriété qui passe à la limite. L'erreur du raisonnement consiste à ne pas avoir conscience qu'on utilise un passage à la limite injustifié dans les trois derniers mots «et donc π».

Si vous n'êtes pas persuadé que tout passage à la limite d'une propriété doit être justifié, considérez de nouveau le paradoxe *(3)* ou réfléchissez à cet autre exemple d'un passage à la limite non justifié produisant une absurdité :

Les ensembles $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$, ..., $\{0,1, ..., n\}$ sont tous des ensembles finis. Donc à la limite l'ensemble $\{0,1,..., n, ...\}$ de tous les nombres entiers est un ensemble fini.

Humour avec π

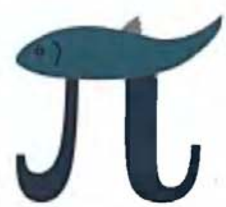
Une démonstration fausse peut aussi conduire à un résultat vrai, comme l'illustre l'exemple suivant, familier aux élèves de taupe :

– Par commutativité du produit : CHEVAL = VACHE L
– Une vache est une bête à pis : VACHE = $\beta\,\pi$
– Un oiseau est une bête à ailes : OISEAU = β L
– Donc : CHEVAL / OISEAU = $\beta\,\pi$ L / β L = π
– CHEVAL et OISEAU n'ayant aucun rapport entre eux, π est irrationnel.

Nous avons représenté ci-contre quelques dessins-rébus utilisant π. Les premiers proviennent du numéro spécial *Le nombre π* publié en 1980 par la revue *Le petit Archimède*.

π-veau

π-lié



π-thon

π-gnon

cheval-π

co-π

Faits curieux sur π : des décimales fausses isolées

On a constaté une chose étonnante au sujet de la série de Madhava-Gregory-Leibniz *(dont nous reparlerons au chapitre 4)* :

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

En calculant 500 000 termes de cette série, on trouve :

$$\pi_{500\,000} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{999\,999}\right) =$$

$$3{,}14159065358979324046264338326950288419 7\ldots,$$

Or, lorsqu'on compare ces chiffres avec les vraies décimales de π, on remarque quelques différences isolées :

$\pi_{500\,000} =$ 3,14159065358979324046264338326950288419 7...
π = 3,14159265358979323846264338327950288419 7...

La découverte de Roy North, communiquée par courrier électronique à Jonathan et Peter Borwein, paraît incroyable : comment une somme partielle peut-elle être fausse à la sixième décimale et juste à la septième, à la huitième, etc ?

On a toutefois trouvé une explication à ce phénomène. Elle fait intervenir les nombres d'Euler et provient d'une relation jusqu'alors inconnue entre deux formules de sommation, que l'on a découverte par une méthode automatique. La formule qui explique le phénomène a été vérifiée par utilisation d'un logiciel de calcul formel, puis complètement démontrée, à la main cette fois.

Il faut remarquer ici la triple intervention de l'informatique et le va-et-vient entre le travail de l'ordinateur et celui du mathématicien : découverte (par un mathématicien) d'une chose étrange à la suite d'un calcul par programme (ordinateur) ; identification de la suite des écarts avec π (ordinateur) ; élaboration (par le mathématicien) d'une nouvelle relation à partir de cette information ; vérification de la nouvelle relation avec un logiciel de calcul formel (ordinateur) ; démonstration de la nouvelle identité (par le mathématicien). Pour plus de détails, on consultera l'article de 1989 de J. Borwein, P. Borwein et K. Dilcher indiqué en bibliographie générale *(à la fin de l'ouvrage)*.

Un nombre très proche de π mais qui n'est pas π

Pour trouver de nouvelles formules reliant les constantes mathématiques, on utilise aujourd'hui des méthodes numériques qui consistent à rechercher de façon systématique des relations entre ces constantes après les avoir évaluées avec une grande précision (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de chiffres). Lorsqu'une relation est vérifiée sur un grand nombre de chiffres, on a de bonnes raisons de la croire vraie *à l'infini*. C'est très souvent le cas, mais en l'absence de preuve, il faut se méfier. Voici l'exemple le plus remarquable qu'une coïncidence numérique ne remplacera jamais une preuve mathématique. On considère la somme infinie :

$$\pi' = \left(\frac{1}{10^5} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2/10^{10}} \right)^2$$

J. Borwein et P. Borwein ont montré, en 1992, que π' coïncide avec π sur plus de 42 milliards de décimales, mais que π' est différent de π au delà. Un tel exemple doit servir de mise en garde contre certaines conceptions trop naïves des mathématiques expérimentales *(sur ce sujet, voir le chapitre 8, page 140)*.

Une coïncidence mathématique

Les résultats numériques suivants ont été notés par Roy Williams Cleckery, et je les ai vérifiés : il s'agit d'un ensemble de coïncidences plus que remarquables. En calculant les nombres de la forme $\exp(\pi\sqrt{n})$, pour n compris entre 1 et 1 000, on trouve 13 fois un résultat proche d'un entier à moins d'un millième. Le cas $n = 163$ est époustouflant. Puisque 1 000 nombres sont envisagés, il n'aurait pas été surprenant de trouver une ou deux fois un résultat qui coïncide avec un entier à moins d'un millième. En revanche, la probabilité que l'on rencontre 13 cas est très faible. En outre, comme certains de ces nombres coïncident avec un entier à un millionième, un milliardième ou même un mille-milliardième près, cela ne peut pas être une coïncidence. Qui saura trouver une explication ?

$$\exp(\pi\sqrt{25}) = 6635623{,}\underline{999}341134233266067$$
$$\exp(\pi\sqrt{37}) = 199148647{,}\underline{9999}78046551856766$$
$$\exp(\pi\sqrt{43}) = 884736743{,}\underline{999}777466034906661$$
$$\exp(\pi\sqrt{58}) = 24591257751{,}\underline{999999}822213241469$$
$$\exp(\pi\sqrt{67}) = 147197952743{,}\underline{99999}8662454224506$$
$$\exp(\pi\sqrt{74}) = 545518122089{,}\underline{999}174985664301733$$
$$\exp(\pi\sqrt{148}) = 39660184000219160{,}\underline{000}966674358575246$$
$$\exp(\pi\sqrt{163}) = 262537412640768743{,}\underline{999999999999}250072$$
$$\exp(\pi\sqrt{232}) = 604729957825300084759{,}\underline{99999}2171526856431$$
$$\exp(\pi\sqrt{268}) = 21667237292024856735768{,}\underline{000}292038842412959$$
$$\exp(\pi\sqrt{522}) = 14871070263238043663567627879007{,}\underline{999}848772648279480$$
$$\exp(\pi\sqrt{652}) = 68925893036109279891085639286943768{,}\underline{000000000}163738644$$
$$\exp(\pi\sqrt{719}) = 3842614373539548891490294277805829192{,}\underline{9999}87249566012187$$

La plus étonnante des relations est :

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,99999999999925007...$$

qui avait été utilisée en 1975 par Martin Gardner pour faire un poisson d'avril : il avait prétendu que $e^{\pi\sqrt{163}}$ était entier, ce qui, à l'époque, n'était pas facile à tester. Or, non seulement ce nombre n'est pas entier, mais il est transcendant *(voir le chapitre 9)*.

Un début de réponse à ce mystère numérique est proposé dans le livre de John Conway et Richard Guy de 1996 (pp. 224-226). Le nombre 163 est le plus grand des neuf nombres de Heegner, qui possèdent tous des propriétés arithmétiques particulières (le corps de nombres algébriques engendré par $\sqrt{-163}$ est un corps ayant une propriété de factorisation unique). Ces propriétés impliquent d'une part que la formule (découverte par Euler) :

$$n^2 - n + 41$$

($4 \times 41 - 1 = 163$) donne un nombre premier pour $n = 1, 2, 3, ..., 40$ (ce qui est extraordinaire !), et que $e^{\pi\sqrt{163}}$ est presque un entier. Les autres nombres de Heegner sont : 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43 et 67.

Écriture en base π

Fitch Cheney a réussi à exprimer chacun des entiers entre 1 et 100 en utilisant au plus quatre fois π avec les opérations +, ×, racine carrée $\sqrt{\ }$, exponentielle et partie entière $|\ |$. Voici les premières expressions. Saurez-vous aller plus loin dans cette sorte d'écriture en base π ?

$1 = \lvert\sqrt{\pi}\rvert$	$11 = \lvert(\pi\times\pi)+\sqrt{\pi}\rvert$
$2 = \lvert\sqrt{(\pi\times\sqrt{\pi})}\rvert$	$12 = \lvert\pi\times\pi\rvert + \lvert\pi\rvert$
$3 = \lvert\pi\rvert$	$13 = \lvert(\pi\times\pi)+\pi\rvert$
$4 = \lvert\pi+\sqrt{\pi}\rvert$	$14 = \lvert(\pi\times\pi)+\pi+\sqrt{\pi}\rvert$
$5 = \lvert\pi\times\sqrt{\pi}\rvert$	$15 = \lvert\pi\times\pi\rvert + \lvert\pi+\pi\rvert$
$6 = \lvert\pi+\pi\rvert$	$16 = \lvert(\pi\times\pi)+\pi+\pi\rvert$
$7 = \lvert\pi^{\sqrt{\pi}}\rvert$	$17 = \lvert\pi\times\pi\times\sqrt{\pi}\rvert$
$8 = \lvert(\pi\times\pi)-\sqrt{\pi}\rvert$	$18 = \lvert\pi\times\pi\rvert + \lvert\pi\times\pi\rvert$
$9 = \lvert\pi\times\pi\rvert$	$19 = \lvert(\pi\times\pi)+(\pi\times\pi)\rvert$
$10 = \lvert\pi\times\pi\rvert + \lvert\sqrt{\pi}\rvert$	$20 = \lvert\pi\times\sqrt{\pi}\rvert \times \lvert\pi+\sqrt{\pi}\rvert$

Histoire de π aux temps de la géométrie

Quadratures et polygones

Le nombre π est présent, directement ou indirectement, dans tous les textes mathématiques que nous avons retrouvés, y compris dans ceux vieux de 4 000 ans. La connaissance qu'en avaient les civilisations anciennes est parfois limitée à presque rien, mais la rencontre de l'humanité avec π (qui est toujours advenue par la géométrie) suscite dès l'Antiquité grecque de difficiles problèmes dont celui, fameux, de la quadrature du cercle. Cette découverte conduisit les meilleurs esprits à s'intéresser aux mathématiques, les amenant à des développements profonds et subtils : π est un moteur pour l'esprit scientifique. Examinons cette «vie primitive» de π en Occident, en Inde, en Chine et dans quelques autres haut-lieux de culture où l'on chercha à le calculer.

Le « π » des anciens

Lorsqu'on évoque les mathématiques anciennes, les anachronismes surviennent rapidement. Par exemple, affirmer que les Égyptiens avaient évalué que $\pi = (16/9)^2$ serait un peu ridicule. Tout d'abord le symbole «=» ne fut introduit qu'en 1557 par le physicien anglais Robert Recorde ; ensuite π ne désigne la constante sujet de ce livre que depuis le XVIIIe siècle ; enfin le concept de nombre aujourd'hui en usage, implicite dans la définition de π comme «nombre réel», n'est vraiment fixé que depuis la fin du XIXe. Si l'on ajoute que nos chiffres décimaux et nos notations algébriques étaient inconnus des Égyptiens, vous aurez compris qu'ils n'ont jamais rien écrit qui ressemble, même de loin, à la formule : $\pi = (16/9)^2$.

Si l'on voulait s'exprimer de façon plus correcte, il faudrait dire que «dans leurs calculs, les Égyptiens suivent un procédé dont la justification (s'ils la donnaient, ce qui n'est pas le cas) présupposerait qu'il existe une constante fixant le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon, et que cette constante vaut $(16/9)^2$».

Notre but étant de retracer rapidement l'histoire ancienne de π, nous utiliserons par commodité les notations et les notions modernes, même lorsque nous évoquerons des époques éloignées.

Nous formulerons aussi les démonstrations de propositions anciennes dans le langage d'aujourd'hui. Pour des exposés historiques respectueux de la complexité des idées et des faits, les lecteurs se reporteront aux livres spécialisés d'histoire des mathématiques indiqués p.215.

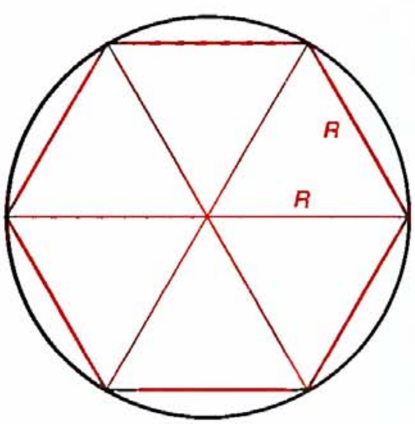
Les Babyloniens

Les plus anciennes valeurs de π dont l'utilisation est attestée chez les civilisations de l'Antiquité sont $\pi = 3$, $\pi = 3 + 1/7$ et $\pi = 3 + 1/8$.

Cette dernière valeur provient d'une tablette babylonienne en écriture cunéiforme, découverte en 1936 et vieille d'environ 4 000 ans. Les Babyloniens semblent y être arrivés de la façon suivante : d'une part, ils savaient que le périmètre d'un hexagone vaut trois fois le diamètre de cet hexagone (ce qui est géométriquement évident et justifie une première approximation de π par 3) ; d'autre part, ils estimaient le rapport entre le périmètre d'un cercle de rayon 1 et celui de l'hexagone inscrit à $57/60 + 36/(60)^2$ (valeur sans doute obtenue par une mesure approchée, exprimée dans le système de numération en base 60 alors en usage). De ces prémisses, on déduit que :

$$\pi = 3 \Big/ \left(\frac{57}{60} + \frac{36}{3\,600}\right) = 3 + \frac{1}{8}$$

Notons qu'une même civilisation peut, selon les contextes, utiliser différentes «valeurs» de π, et que tous les géomètres antiques n'avaient pas compris que le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre est égal au rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon.



Sur une tablette babylonienne écrite en caractères cunéiformes, on a trouvé l'approximation $\pi = 3 + 1/8$. Les Babyloniens y seraient arrivés en comparant le périmètre du cercle avec celui de l'hexagone inscrit, égal à trois fois le diamètre.

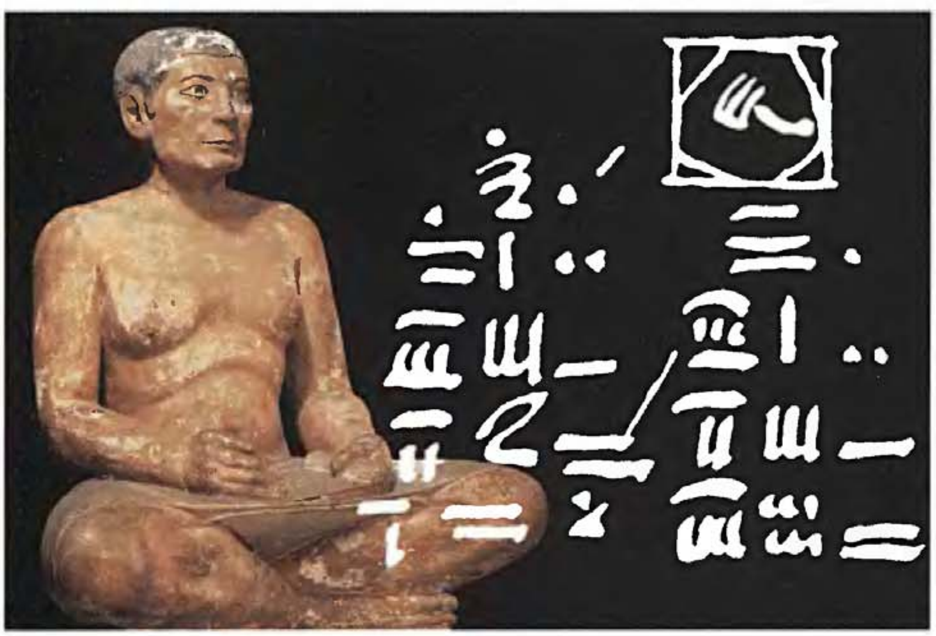
Les Égyptiens

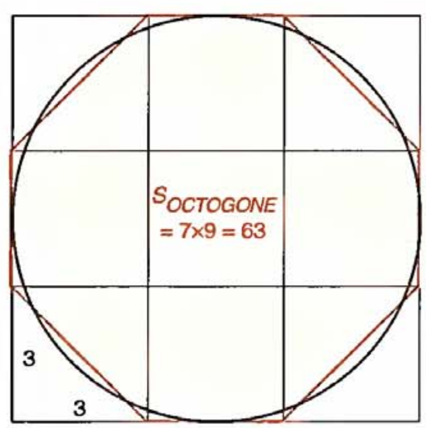
Le papyrus de Rhind, découvert en 1855 et conservé au British Museum, contient le texte, recopié vers l'an 1650 avant notre ère par le scribe Ahmès, d'un manuel de problèmes plus ancien encore (datant sans doute de 1800 avant notre ère). Le calcul mentionné par ce texte implique que π était évalué à $(16/9)^2 = 3{,}160449$.

La méthode indiquée pour calculer la surface d'un disque consiste à effectuer les opérations suivantes : *(a)* enlever un neuvième au diamètre, puis *(b)* multiplier le résultat par lui-même. Ce procédé est remarquablement simple. Traduite en notations modernes, la formule proposée est : $S = (D - D/9)^2$. La formule exacte étant : $S = (D/2)^2\,\pi$, on en déduit que les Égyptiens considéraient implicitement que $\pi = (16/9)^2 = 3{,}160449...$ Nous ne savons pas s'ils avaient conscience que ce n'était qu'une valeur approchée.

La *diminution d'un neuvième* est meilleure que la diminution d'un huitième. Puisque les Égyptiens ramenaient tous leurs calculs à des inverses de nombres entiers, la formule du papyrus de Rhind est la meilleure parmi celles qu'ils envisageaient. Comment l'ont-ils trouvée ? Nous ne le saurons sans doute jamais avec certitude ; cependant le problème 48 du papyrus de Rhind suggère une piste.

Considérons un octogone (irrégulier) construit dans un carré de 9 unités de côté. L'aire de cet octogone, que l'on trouve en comptant le nombre de carrés et de demi-carrés de côté 3, est égale à 63. Avec nos notations, l'aire du disque (qui apparaît très proche de celle de l'octogone, quoiqu'un peu plus grande) est égale à $(9/2)^2\,\pi$; en remplaçant 63





La règle de la diminution du neuvième, utilisée dans le problème 48 du papyrus de Rhind *(ci-contre, en écriture hiératique)* conduit à la valeur $\pi = (16/9)^2$. Elle proviendrait de l'approximation de la surface d'un disque par celle d'un octogone *(ci-dessus)*.

par 64 (ce qui simplifie les calculs et compense l'aire qui semble manquer à l'octogone), on arrive à $(9/2)^2\pi = 64$, c'est-à-dire à $\pi = (16/9)^2$, et donc à la règle de la *diminution du neuvième*.

Notons pour finir que les Égyptiens connaissaient l'égalité entre le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre et le rapport de la surface d'un disque au carré de son rayon (autrement dit, ils savaient que le «π» de $P = 2\pi r$ est le même que le «π» de $S = \pi r^2$). En revanche, ils ne semblent pas avoir connu un énoncé général équivalant au théorème de Pythagore.

La Bible

Un passage de la Bible raconte la construction du temple de Salomon et décrit l'énorme chaudron du fondeur de bronze Hiram (*Livre des Rois*, 1, 7, 3 et 2, chronique 4, 2). Le texte utilise implicitement la valeur $\pi = 3$. Toutefois, les Hébreux avaient peut-être conscience que 3 n'est qu'une approximation, voire même connaissaient de meilleures valeurs pour π.

Voici le passage concerné dans la Bible (dont on date l'écriture aux alentours de 550 avant J.-C.) :

Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entour d'un cordon de trente coudées.

La Bible donne le diamètre et le périmètre de la «mer de fonte» du fondeur Hiram ; la valeur $\pi = 3$ est implicitement utilisée.

Quelques siècles plus tard, après la diffusion des merveilles de la géométrie grecque, la valeur donnée à π par la Bible créera de graves cas de conscience. Le rabbin mathématicien Nehémiah, qui vivait en Palestine vers l'an 150 de notre ère, est déchiré entre la valeur biblique de 3 et la valeur 3 + 1/7 qu'Archimède avait proposée (parmi d'autres, car il savait bien qu'il s'agissait de valeurs approchées, voir page 55). Nehémiah, comprenant sans doute qu'Archimède était plus proche de la vérité que le passage du texte biblique, tente de s'en sortir en affirmant que la Bible ne se trompe pas, mais qu'elle parle du périmètre *intérieur*, lequel, compte tenu de l'épaisseur du récipient, peut parfaitement valoir trois fois le diamètre *extérieur*. On a aussi argué, pour défendre cette hypothèse qui concilie foi et géométrie, que donner le diamètre et le périmètre d'un cercle revient à se répéter, ce que la Bible ne fait certainement pas et qu'en conséquence, il est absurde de lire la Bible autrement que selon l'interprétation de Nehémiah. En Europe, au XVIIIe siècle, d'autres commentateurs soucieux de concilier science et foi prétendront que le chaudron était de forme hexagonale (bien que le texte de la Bible précise sans ambiguïté «toute ronde»). Il semble pourtant clair que, dans le contexte d'artisanat peu précis de l'époque, la valeur approchée π = 3 était largement suffisante : il n'y a donc pas à justifier la Bible.

La quadrature du cercle

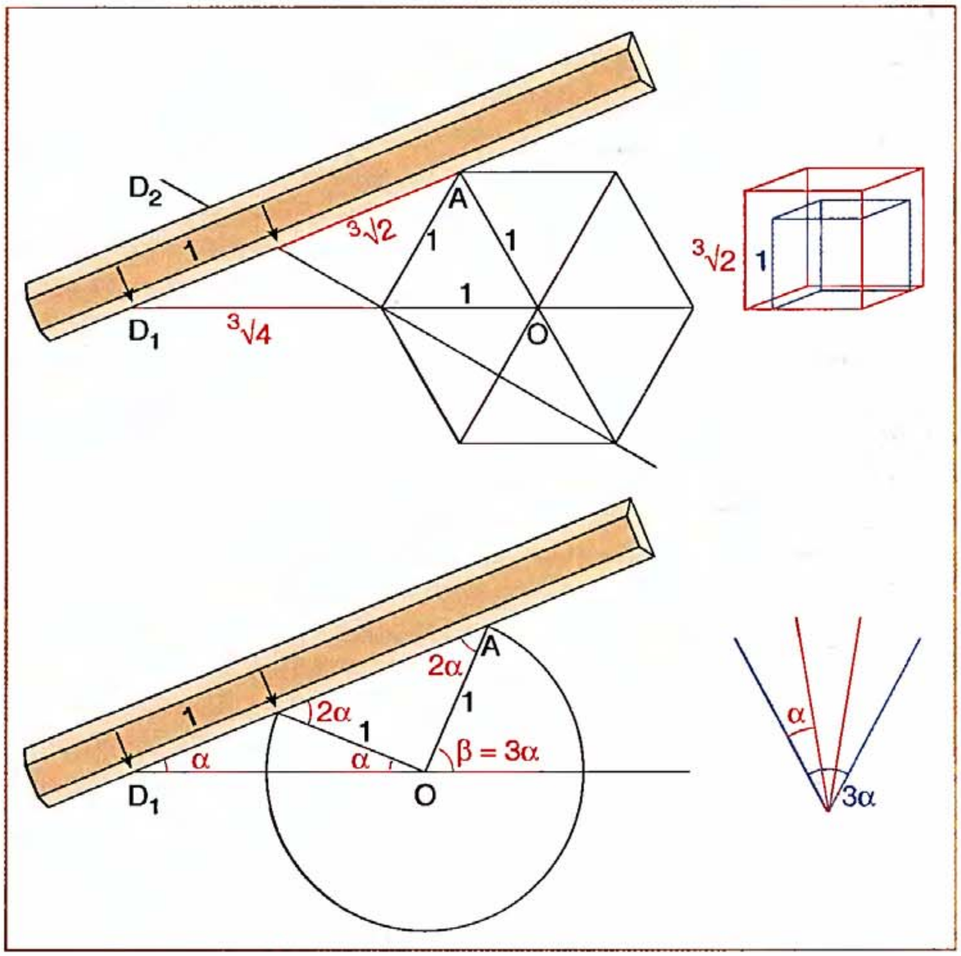
Revenons au monde grec, où vont se dérouler des épisodes cruciaux de l'histoire de π. Anaxagore (500-428 avant J.-C.), emprisonné à Athènes pour impiété (car il professait une théorie du Soleil qui en niait le caractère divin et soutenait que la Lune ne faisait que refléter la lumière solaire), se proposa de *quarrer le cercle*.

Étant donné un cercle, le problème consiste à dessiner un carré de même aire. Dans ce problème de la *quadrature du cercle* qui allait désespérer les géomètres pendant 23 siècles, on s'impose en général :

- de n'utiliser qu'une règle non graduée et un compas ;
- de ne procéder qu'à un nombre fini de tracés intermédiaires.

Quand on s'affranchit d'une de ces deux contraintes, de nombreuses solutions sont possibles *(voir plus loin)*. Quand on les accepte, le problème revient à trouver une construction de $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas, ce dont on a prouvé l'impossibilité en 1882 *(voir le chapitre 9)*.

Un autre problème célèbre, celui de la *rectification du cercle*, consiste à tracer un segment dont la longueur est celle de la circonférence du cercle de départ. Cela revient à construire le nombre π à la règle et au compas. Sachant qu'avec une règle et un compas, il est



Résolution géométrique de deux problèmes célèbres depuis l'Antiquité, la duplication du cube et la trisection de l'angle. La duplication du cube *(en haut)* consiste à construire le côté d'un cube de volume double de celui du cube unité, ce qui revient à tracer un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$. La trisection de l'angle *(en bas)* consiste à construire, à partir d'un angle β, l'angle $\alpha = \beta/3$. Les Grecs s'imposaient de n'utiliser qu'un compas et une règle non graduée pour résoudre ces problèmes, mais on sait aujourd'hui qu'ils sont insolubles dans ces conditions. Les constructions ci-contre, au contraire, tirent parti de marques espacées d'une unité sur la règle. On procède par une série d'ajustements : la règle prend appui sur le point *A* ; puis on la fait glisser et tourner autour de ce point jusqu'à ce que les graduations rencontrent les droites D_1 et D_2 ou le cercle, ce qui, en toute rigueur, ne pourrait être obtenu en un nombre fini d'étapes. On construit de cette façon un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ *(en haut, entre la deuxième marque et le point A)* ou un angle $\alpha = \beta/3$ *(en bas, entre la règle et D_1)*.

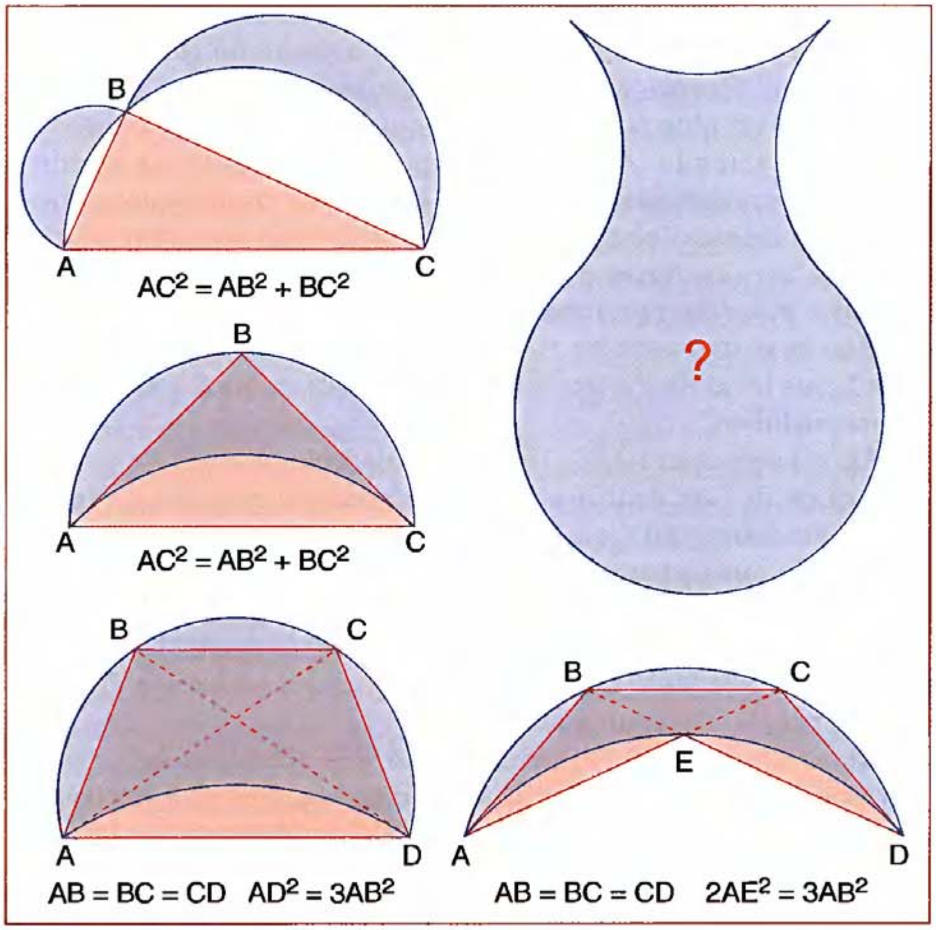
possible de multiplier des longueurs et d'extraire des racines carrées, on conclut que les deux problèmes sont équivalents *(voir page 165)*.

D'autres problèmes géométriques du même genre passionnèrent les Grecs et leurs successeurs :

• *la trisection de l'angle* : tracer un angle équivalant au tiers d'un angle donné. La solution existe pour certains angles, mais il n'existe pas de solution générale. Les travaux mathématiques des XVIII[e] et XIX[e] siècles ont montré, par exemple, qu'il est impossible de construire un angle de 20 degrés, le tiers d'un angle de 60 degrés (qui, lui, est constructible, puisque c'est l'angle aux sommets d'un triangle équilatéral) ;

• *la duplication du cube* : un cube étant donné, tracer le côté d'un cube ayant un volume double de celui du cube initial. Résoudre ce problème à la règle et au compas reviendrait à exprimer la racine cubique de 2 à partir de racines carrées, ce dont on a prouvé l'impossibilité au XIX[e] siècle.

Anaxagore ne réussit pas à quarrer le cercle, mais finit par être libéré grâce à l'influence de son élève Périclès. Un peu plus tard, Antiphon (sophiste Athénien du V[e] siècle avant J.-C.) proposa de quarrer le cercle en construisant des polygones ayant un nombre de côtés de plus



Quadrature de quelques lunules. Contrairement au cercle, les lunules, figures limitées par des arcs de cercle, peuvent être quarrées. Au Vᵉ siècle avant notre ère, Hippocrate de Chio fut le premier à proposer une telle quadrature. Dans les quatre constructions détaillées ci-contre, l'aire de la ou des lunules *(en bleu)* est égale à celle du polygone *(en rouge)*. Pour le démontrer, on utilise le principe suivant : quand deux segments de cercle (figures limitées par un arc de cercle et la corde qui le sous-tend) sont semblables, c'est-à-dire superposables à base égale, leurs aires et les carrés de leurs bases sont dans un même rapport. Dans ces quatre exemples, on ajoute ou on retranche des segments de cercle construits sur les côtés du polygone. Les relations entre les carrés de ces côtés montrent que l'aire ajoutée (dans la construction en haut à gauche, les demi-cercles sous-tendus par les côtés *AB* et *BC*) est exactement compensée par l'aire retranchée (le demi-cercle sous-tendu par *AC*). Nous laissons au lecteur le soin de quarrer la figure de droite !

en plus grand. L'idée de ces constructions est due à Eudoxe de Cnide (408-355 avant J.-C.) et constitue *le principe d'exhaustion* : en prenant un nombre de côtés assez grand, on construit un polygone qui se confond avec le cercle et on a donc *exhaustivement* recouvert le cercle.

Toute la difficulté est de savoir si on atteint vraiment le cercle en un nombre fini d'étapes ou «à la limite» (pour dire les choses en termes modernes), ce qui, nous le savons bien à présent, n'est pas du tout pareil. La chose n'est pas très claire à l'époque, et Antiphon soutient, en s'appuyant sur le principe d'exhaustion, que puisqu'on peut quarrer individuellement les polygones qui s'identifient au cercle, on peut aussi quarrer le cercle. L'erreur qu'il commet est analogue à celle de la démonstration de la rationalité de π donnée au chapitre 2 : le fait que chacune des valeurs approchées de π données par les périmètres des polygones successifs soit constructible à la règle et au compas ne justifie en rien de «passer à la limite» pour conclure que π lui même est constructible à la règle et au compas.

On trouve dans le plus célèbre livre de mathématiques de tous les temps, *Les éléments* d'Euclide (IIIᵉ siècle avant J.-C.), une conception


ΕΥΚΛΕΙ-
ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΟΝ.
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.
ΟΡΟΙ.
DEFINITIONES.
Æquales circuli sunt, quorũ diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex cẽtris rectæ lineæ sunt æquales.

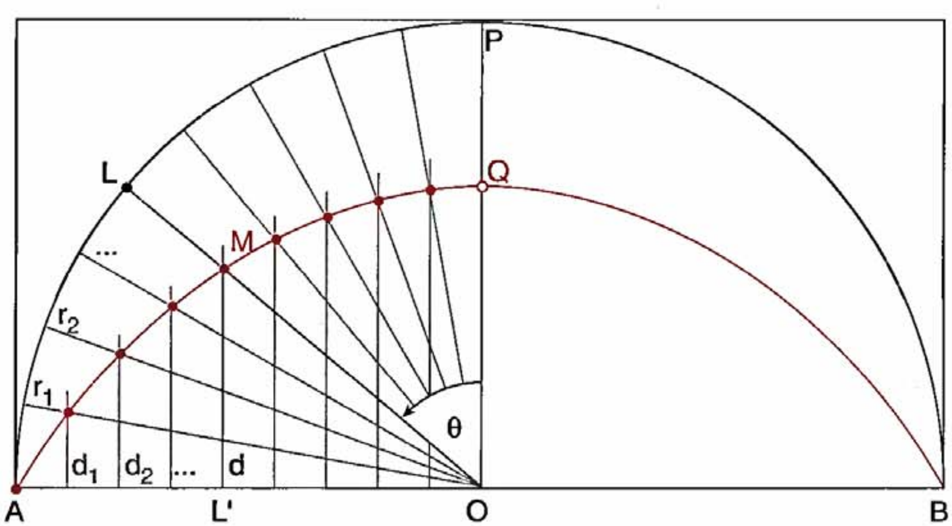
Début du livre VII des *Éléments* d'Euclide, édition gréco-latine de 1573.

bien plus satisfaisante du principe d'exhaustion. D'après Euclide, en prenant des polygones ayant un grand nombre de côtés, on peut «rendre la différence entre l'aire à calculer et l'aire des polygones qu'on construit plus petite que toute quantité positive pré-assignée, aussi petite soit-elle». Cette façon de parler est équivalente aux définitions rigoureuses des limites formulées au XIXᵉ siècle («quel que soit epsilon, il existe alpha...»). Ainsi conçu, le principe d'exhaustion débouche sur une forme de *calcul intégral* avant la lettre et conduit d'ailleurs à la détermination exacte d'aires et de volumes. Il permet d'établir avec une certaine rigueur, comme nous l'avons fait au chapitre 1, que le «π» de $P = 2\pi r$ est le même que le «π» de $S = \pi r^2$ dans un espace euclidien.

Au Vᵉ siècle avant J.-C., Hippocrate de Chio (distinct du médecin Hippocrate de Cos, dont le serment est encore prononcé aujourd'hui par les étudiants qui terminent leurs études de médecine) tente de résoudre la quadrature du cercle et semble progresser. Il réussit en effet à quarrer diverses figures ayant des bords composés d'arcs de cercle et qu'on appelle *lunules*. Ces lunules dont la quadrature est possible fascinèrent bien d'autres géomètres, dont Léonard de Vinci qui en construisit plus d'une centaine.

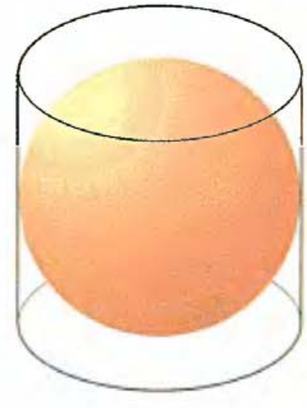
Assez étrangement, le grand Aristote (384-322 avant J.-C.) semble n'avoir admis ni l'intérêt du principe d'exhaustion, ni les raisonnements d'Hippocrate de Chio justifiant la quadrature des lunules.

Mentionnons une tentative intéressante de quadrature du cercle. Hippias d'Elis, né vers 480 avant J.-C., est un contemporain de Socrate que Platon mentionne en plusieurs endroits. Il est resté dans l'histoire des mathématiques pour sa découverte de la *quadratrice*, grâce à laquelle Dinostrate proposa en 335 avant J.-C. une première solution (fausse, bien sûr) du problème de la quadrature du cercle *(voir ci-dessous)*.



La quadratrice d'Hippias *(courbe en rouge)* : presque une solution au problème de la quadrature du cercle. On imagine un point L parcourant à vitesse constante l'arc de cercle AP, tandis qu'une droite d perpendiculaire à AB se déplace dans le même temps, à vitesse constante, de A en O. Le lieu de l'intersection du rayon OL avec d (l'ensemble des points M) est la quadratrice d'Hippias. Pour en construire quelques points à la règle et au compas, on divise l'arc de cercle AP en n arcs égaux, ce qui donne n rayons r_1, r_2, ..., et on trace n droites verticales d_1, d_2, ..., entre A et O, régulièrement espacées. Le point Q, à l'intersection de la quadratrice et de OP, n'est pas constructible ainsi, mais il est obtenu comme limite quand L tend vers P. Montrons que le rapport $AB/OQ = \pi$. Par définition, $AL'/(\pi/2 - \theta)$ est constant et vaut $2r/\pi$. Comme $AL' = r - OM\sin\theta$, on obtient $r - OM\sin\theta = 2r(\pi/2 - \theta)/\pi$, d'où $OM\pi\sin\theta/\theta = 2r$. Lorsque θ tend vers 0, $\sin\theta/\theta$ tend vers 1, OM tend vers OQ, et on trouve : $\pi = 2r/OQ$. Comme nous avons construit deux segments dans un rapport de π, le problème de la quadrature semble résolu. Sauf que... le point Q ne peut pas être tracé en un nombre fini d'étapes à la règle et au compas. La solution d'Hippias, malgré son ingéniosité, n'est pas valable.

Archimède



Archimède de Syracuse était surtout un immense mathématicien. Ci-dessus, deux de ses découvertes : polyèdre semi-régulier à 32 faces hexagonales et pentagonales, dessiné par Léonard de Vinci ; cylindre et sphère inscrite dont les volumes sont dans un rapport de 2/3.

Un peu plus tard, le grand Archimède de Syracuse (287-212 avant J.-C.), à la fois mathématicien et ingénieur, fait progresser notre connaissance de π de manière remarquable.

Dans son texte intitulé *De la mesure du cercle*, il commence par établir que le rapport de la surface d'un disque au carré de son rayon est égal au rapport de son périmètre à son diamètre ; ensuite, en considérant des polygones de 6, 12, 24, 48 puis 96 côtés, il calcule soigneusement des encadrements successifs de π qui le conduisent à l'évaluation $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$, ou $223/71 < \pi < 22/7$.

Autrement dit, il obtient : $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

Ce calcul est assez stupéfiant, car aucune notation algébrique n'était disponible ; en outre, Archimède n'utilisait même pas notre système de numération de position pour mener ses calculs.

La méthode géométrique d'Archimède fait appel à de purs calculs abstraits (et non à des mesures) ; par conséquent, elle ne repose pas sur l'hypothèse que notre monde physique est euclidien *(voir le chapitre 1)*. C'est apparemment la première méthode jamais proposée permettant *en théorie* le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

La méthode indiquée au chapitre 1, page 12, pour obtenir les décimales de π uniquement par des calculs arithmétiques élémentaires (des *additions* et des *multiplications* d'entiers suivis d'un *décompte* et d'une *division*) est plus simple dans son principe que la méthode d'Archimède, mais moins efficace, comme nous allons le voir. Nous ne savons pas si Archimède en avait connaissance : peut-être la trouvait-il évidente mais trop lente ?

Voici la méthode d'Archimède pour calculer π. Il considère un cercle de rayon 1 qu'il encadre en dessinant à l'intérieur et à l'extérieur deux polygones de 3×2^n côtés. Notons a_n le demi-périmètre du polygone circonscrit, et b_n celui du polygone inscrit *(voir la figure page suivante)*.

Par des considérations géométriques, on montre que pour $n = 1$ (cas de l'hexagone) : $a_1 = 2\sqrt{3}$ $\qquad b_1 = 3$
puis, pour tout n : $1/a_n + 1/b_n = 2/a_{n+1}$ $\qquad b_n \times a_{n+1} = (b_{n+1})^2$

En utilisant ces formules de récurrence, il est possible d'encadrer π avec la précision souhaitée, pourvu qu'on sache calculer des racines carrées (ce qui est au moins réalisable par tâtonnements). Le calcul d'Archimède correspond à des évaluations de a_5 et b_5.

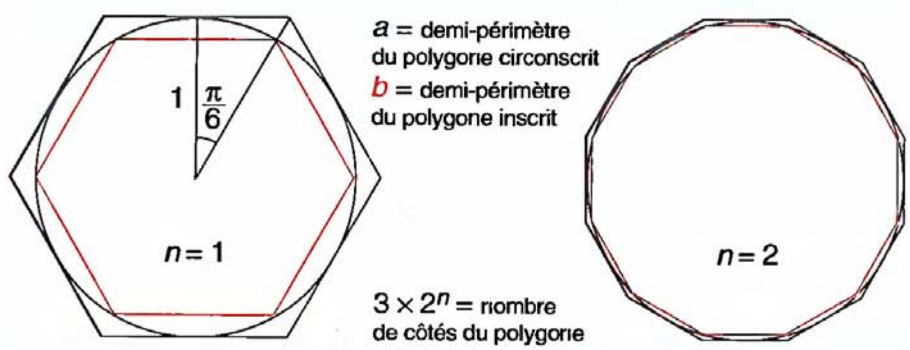
Voici, en termes modernes, la démonstration des formules d'Archimède. En prenant un rayon égal à 1, on voit immédiatement sur la figure de la page suivante que :

$$a_n = 3\times2^n \tan[\pi/(3\times2^n)] \qquad b_n = 3\times2^n \sin[\pi/(3\times2^n)]$$

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. […]

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. […]



$a_1 = 2\sqrt{3} = 3{,}46..$ $\quad b_1 = 3$

$a_2 = \dfrac{12}{2+\sqrt{3}} = 3{,}21..$ $\quad b_2 = \dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3{,}10..$

Dans son traité intitulé *De la mesure du cercle*, Archimède expose sa méthode pour calculer π, qui fait intervenir des polygones. En calculant par récurrence les périmètres a_n et b_n des polygones circonscrit et inscrit à 3×2^n côtés pour n de plus en plus grand, on obtient des encadrements de π de plus en plus précis.

(comme on peut faire disparaître π de ces formules en changeant d'unité pour la mesure des angles, nous ne sommes pas en train de tourner en rond et de calculer π à partir d'une valeur calculée de π !)

En posant $\mu = \pi/(3\times 2^n)$, la première formule de récurrence $1/a_n + 1/b_n = 2/a_{n+1}$ se ramène à :

$$\tan(\mu/2) = \tan\mu \sin\mu / (\tan\mu + \sin\mu)$$

On montre que cette relation est vraie pour tout angle μ entre 0 et π/4 : en effet, en posant $t = \tan \mu/2$ et en utilisant les égalités $\sin\mu = 2t/(1+t^2)$ et $\tan\mu = 2t/(1-t^2)$, on trouve que :

$$\tan\mu \sin\mu / (\tan\mu + \sin\mu) = \frac{[2t/(1-t^2)] \times [2t/(1+t^2)]}{2t/(1-t^2) + 2t/(1+t^2)}$$

Démontrer la deuxième relation de récurrence $b_n \times a_{n+1} = (b_{n+1})^2$ revient à établir l'égalité :

$$2\sin(\mu/2) = \sqrt{2\tan(\mu/2)\sin\mu}$$

ce qui est vrai pour tout μ entre 0 et π/4, car $\sin\mu = 2\sin(\mu/2)\cos(\mu/2)$, d'où :

$$\sqrt{2\tan(\mu/2)\sin\mu} = \sqrt{2\,[\sin(\mu/2)/\cos(\mu/2)] \times 2\sin(\mu/2)\cos(\mu/2)}$$
$$= \sqrt{4\,[\sin(\mu/2)]^2} = 2\sin(\mu/2)$$

Remarquons au passage que la relation qui sert à établir l'encadrement d'Archimède est vraie même si on ne part pas d'un hexagone.

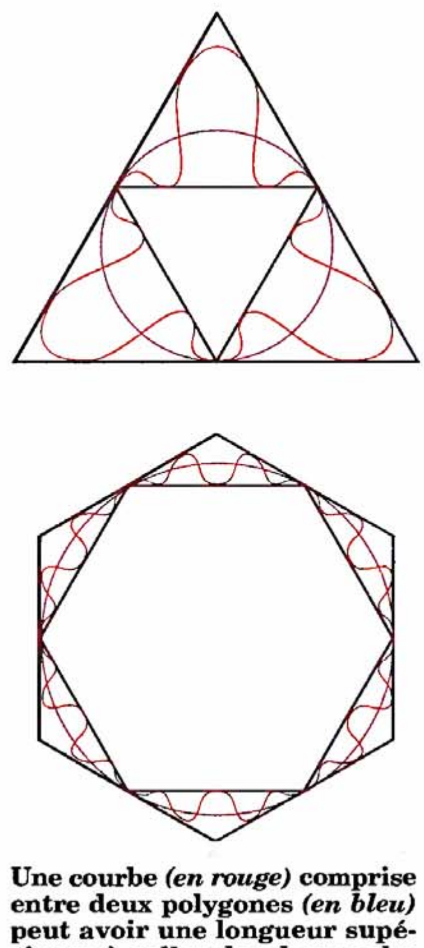
Il est nécessaire de préciser qu'Archimède ne procédait pas comme nous (en utilisant la trigonométrie !), mais s'appuyait sur des raisonnements purement géométriques.

Une hypothèse implicite dans la méthode d'Archimède mérite d'être précisée. Pour obtenir un encadrement de π, il faut admettre que la longueur d'une courbe comprise entre les deux polygones est encadrée par les longueurs des deux polygones. Cette hypothèse est justifiée dans le cas d'un cercle (ou même de certaines autres courbes) mais cela n'est pas si facile à prouver. En outre, elle n'est pas vraie pour toute courbe, comme nous le savons aujourd'hui, notamment grâce aux fractales.

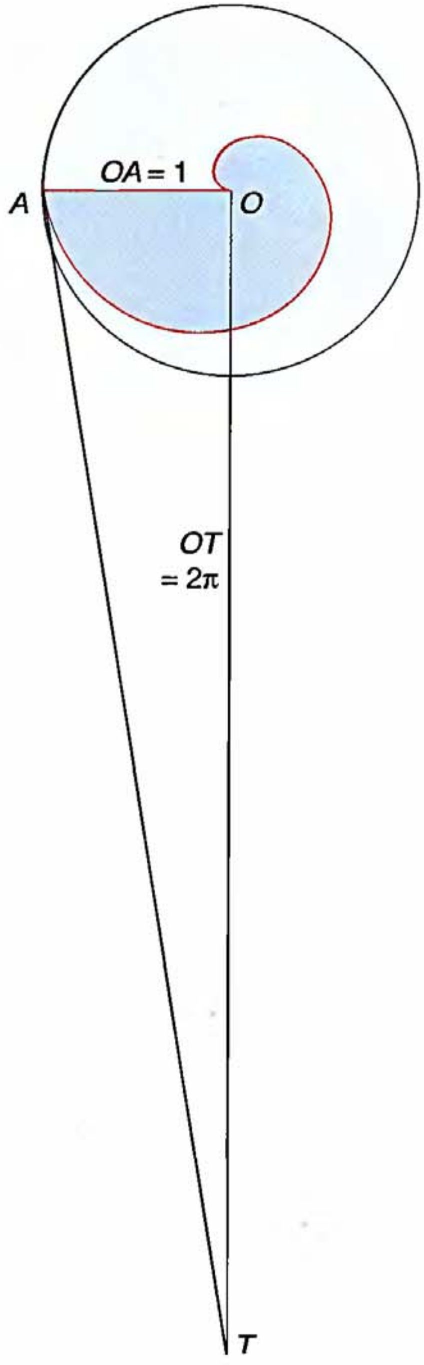
Avec les formules d'Archimède, on montre que l'erreur est divisée par quatre à chaque étape : on gagne moins d'un chiffre décimal à chaque étape (plus précisément, on gagne trois chiffres en cinq étapes). C'est beaucoup mieux qu'avec la formule arithmétique de la page 12, car il fallait alors multiplier les calculs par plus de 10 pour gagner un chiffre.

Voici les approximations données par les formules d'Archimède :

$b_1 = 3$	$a_1 = 3{,}464101616$
$b_2 = 3{,}105828540$	$a_2 = 3{,}215390308$
$b_3 = 3{,}132628612$	$a_3 = 3{,}159659942$
$b_4 = 3{,}139350206$	$a_4 = 3{,}146086216$
$b_5 = 3{,}141031951$	$a_5 = 3{,}142714600$



Une courbe *(en rouge)* comprise entre deux polygones *(en bleu)* peut avoir une longueur supérieure à celles des deux polygones, même si l'espace entre eux devient de plus en plus petit. Archimède (avec raison dans le cas du cercle) néglige cette difficulté.



La spirale d'Archimède est décrite par un point se déplaçant à vitesse constante sur une droite en rotation uniforme. Au bout d'une révolution, l'aire délimitée par la spirale est égale au tiers de l'aire du cercle de rayon *OA*, et l'intersection de la tangente à la spirale en *A* avec la verticale passant par *O* est un point *T* tel que $OT = 2\pi OA$.

Si Archimède avait poursuivi deux étapes de plus (en considérant des polygones à 192 côtés et à 384 côtés), il aurait trouvé les encadrements suivants de π :

$$b_6 = 3{,}141452471 \qquad a_6 = 3{,}141873050$$
$$b_7 = 3{,}141557608 \qquad a_7 = 3{,}141662748$$

Pour arriver à son approximation $223/71 < \pi < 22/7$, Archimède a dû évaluer des racines carrées à chaque étape, par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures selon qu'il calculait a_n ou b_n.

Remarquons aussi qu'en notant *s(p)* la longueur du côté d'un polygone régulier de *p* côtés inscrit dans le cercle de rayon 1, on établit par des considérations géométriques ou trigonométriques la relation suivante, qui donne la longueur du côté du polygone inscrit à 2*p* côtés :

$$s(6) = 1 \qquad s(2p) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2(p)}}$$

De cette relation, on déduit une autre expression de la suite b_n des demi-périmètres :

$$b_1 = 3 \qquad b_n = 3\times 2^{n-1}\, s(3\times 2^n)$$

Il est même possible de la définir sans utiliser a_n ni *s(p)* :

$$b_1 = 3 \qquad b_{n+1} = 3 \times 2^n \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left[b_n / \left(3 \times 2^{n-1}\right)\right]^2}}$$

Ce sont de telles relations qui furent utilisées en Inde pour calculer π avec plus de précision encore qu'Archimède.

À partir d'Archimède, π existe comme *objet mathématique parfait* et inaccessible et, de ce fait, comme défi permanent à l'intelligence des hommes. Toutefois, durant plus de 18 siècles, rien de bien nouveau ne sera apporté à la connaissance de ce nombre. Des valeurs approchées meilleures que celles d'Archimède seront calculées, mais elles le seront par sa méthode ou par des méthodes très proches et en les poussant un peu plus loin. Les progrès du système décimal, la plus grande maîtrise des opérations arithmétiques, la ténacité de quelques obstinés seront les seules sources des avancées jusqu'au XVe siècle.

Archimède montra également que la spirale décrite par un point animé d'un mouvement uniforme sur une droite tournant elle aussi uniformément (spirale qui porte aujourd'hui son nom, bien qu'elle fut découverte par Conon d'Alexandrie) permet de quarrer le cercle, tout comme la quadratrice d'Hippias.

On attribue à Archimède l'invention de la vis sans fin, de la poulie mobile et des roues dentées, la formulation d'une théorie du centre de gravité, du principe du levier et, bien sûr, du fameux principe selon lequel «tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé». Il aurait fait cette découverte dans son bain et se serait élancé nu dans la rue en s'exclamant «Eurêka ! Eurêka !». Archimède dirigea la défense de Syracuse attaquée par Rome et tint en l'échec l'armée de Marcellus pendant trois ans. Finalement il périt lorsque les Romains s'emparèrent de la ville, bien que Marcellus ait demandé qu'on l'épargne. Sa tombe, que Cicéron retrouva, portait l'image d'une sphère inscrite dans un cylindre, en souvenir du rapport qu'il avait trouvé entre ces deux volumes.

Sur les excès de la légende entourant Archimède, qui font de lui, avec Léonard de Vinci et Albert Einstein, le prototype parfait du génie scientifique, on consultera le livre de Sven Ortoli et Nicolas Witkowski intitulé *La baignoire d'Archimède* *(voir la bibliographie page 215).*

Les Mayas

La science des Mayas, dont les premières traces remontent à plus de 2 000 ans, semble avoir atteint un haut degré de raffinement mathématique et trigonométrique, si l'on en juge d'après la précision extraordinaire de leur système calendaire. Selon certains spécialistes, les savants Mayas auraient, bien avant leurs envahisseurs de l'Ancien Monde, utilisé des valeurs de π ayant une précision d'au moins huit chiffres. Il ne s'agit là que de spéculations, car, en 1560, Diego de Landa, évêque de ce Yucatán que les Espagnols venaient de conquérir, brûla tous les documents mayas retrouvés en proclamant qu'ils ne contenaient que «des superstitions et les mensonges du Diable». Un important chapitre de l'histoire de π nous manquera toujours.

En Inde

Le plus ancien document indien où figurent des calculs faisant intervenir π est le *Siddhanta*, daté de l'an 380 de notre ère ; ce texte utilise la valeur 3 + 177/1 250 = 3,1416.

L'*Aryabhatiya*, écrit par Aryabhata en 499, utilise encore la valeur 3,1416 ; on pense qu'elle fut obtenue à partir de polygones, par une méthode semblable (ou même identique) à celle d'Archimède.

Un peu plus tard, le mathématicien indien Brahmagupta, né en 596 de notre ère (on soutient parfois que deux mathématiciens différents portèrent ce nom et furent ensuite confondus), propose pour π la valeur $\sqrt{10}$ = 3,162277, ce qui est moins précis que ses prédécesseurs.

En Chine

Douze siècles avant notre ère, les Chinois utilisaient la valeur 3. En l'an 130 de notre ère, Hou Han Shu proposa la valeur 3,1622, très proche de $\sqrt{10}$. Comme le système décimal a toujours été utilisé en

Chine, cette approximation fut sans doute obtenue comme valeur approchée décimale de $\sqrt{10}$.

En 263, le mathématicien Liu Hui étudie, comme Archimède, un polygone de 192 côtés et propose l'encadrement :

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$$

puis, avec un polygone de 3 072 côtés, trouve $\pi = 3{,}14159$.

Au v^{e} siècle, Tsu Chung-Chih et son fils Tsu Keng-Chih (aussi écrit Zu Chongshi) trouvent l'encadrement :

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

et découvrent la valeur approchée 355/113, ce qui représente une précision que l'Europe n'atteindra qu'au XVI^{e} siècle.

Cette avance semble due à l'utilisation du système décimal – supérieur aux systèmes utilisés ailleurs – qui facilite les calculs et permet d'aller plus loin.

Dans le monde de l'Islam

Vers l'an 800, Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi (aussi orthographié Al'Khwarizmi ou Al-Huwarizmi, et dont le nom est à l'origine du mot *algorithme*), né à Huwarizm (aujourd'hui Khiva en Ouzbekistan), utilise la valeur 3,1416.

Vers 1450, Al-Kashi (ou Ali ibn Muhammad al-Kuchdki), astronome à Samarkand (aujourd'hui au Turkestan) dont il dirige l'observatoire, calcule π avec 14 décimales par la méthode des polygones d'Archimède ; plus précisément, il utilise la formule de récurrence qui donne le côté d'un polygone à p côtés :

$$s(6) = 1 \qquad s(2p) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2(p)}}$$

Il mène son calcul en utilisant 27 fois la formule, ce qui revient à considérer le périmètre d'un polygone de 3×2^{28} côtés. Al-Kashi calcule dans le système sexagésimal et trouve : $2\pi = 6, 16\ 59\ 28\ 01\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50$, soit $\pi = 3, 08\ 29\ 44\ 00\ 47\ 25\ 53\ 07\ 25$. Cette valeur est exacte jusqu'à la dernière position, comme on peut le vérifier à l'aide du tableau de π en base 60 donné à la fin du livre, page 213.

C'est la première fois dans l'histoire de l'humanité que l'on obtient plus de dix décimales de π. Pour 100 décimales, il faudra attendre le XVIII^{e} siècle, et le XX^{e} pour 1 000 décimales. En fait, au XX^{e} siècle, on atteindra aussi 10 000 décimales, puis 100 000 décimales, puis un million de décimales et même (en 1989) un milliard de décimales. Remarquons que l'accélération de l'histoire humaine, observée dans bien d'autres domaines (par exemple, en prenant comme critère le nombre d'êtres humains présents sur Terre ou la quantité d'énergie dépensée par l'homme), est ici particulièrement nette.

En Europe avant l'analyse

Après Archimède, aucun progrès notable dans le calcul de π n'est accompli en Occident où, à cause de la trop lente adoption du système décimal, les calculs restent pénibles et moins précis que ceux faits en Chine.

• Claude Ptolémée (vers 100-vers 170), membre présumé de l'école d'Alexandrie, auteur du grand traité de l'*Almageste* qui est resté l'ouvrage de référence en astronomie jusqu'à Copernic et Kepler, utilise la valeur sexagésimale : $3 + 8/60 + 30/60^2 = 3 + 17/120 = 377/120 = 3{,}1416666$.

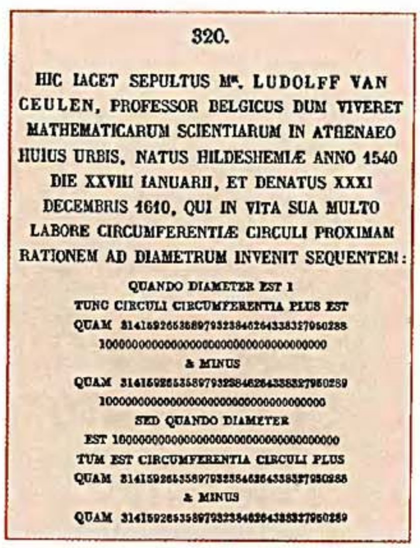
• En 1220, Léonard de Pise, dit Fibonacci (1180-1250), calcule l'approximation 3,141818.

• En 1573, en Allemagne, Valentinus Otho retrouve 355/113 (connu des Chinois depuis le v^e^ siècle), ce qui est une bonne approximation rationnelle de π puisque 355/113 = 3,14159292... Cette valeur aurait été proposée à la même époque par Adrian Anthonisz, aussi appelé Adriaan Anthoniszoon (1527-1607), mais ne fut publiée par son fils Adrien Métius qu'en 1625 avec l'explication qu'elle résultait de l'encadrement $333/106 < \pi < 377/120$, lorsqu'on calcule la moyenne des numérateurs et des dénominateurs.

• En 1464, en Allemagne, Nicolas de Cues (1401-1464) propose la valeur $3/4(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 3{,}13615$, dont Regiomontanus démontre un peu plus tard la fausseté.

• En 1593, aux Pays-Bas, Adriaen Von Rooman (1561-1615), aussi appelé Adrien Romain ou Romanus, calcule 15 décimales en utilisant un polygone régulier de 2^{30} côtés.

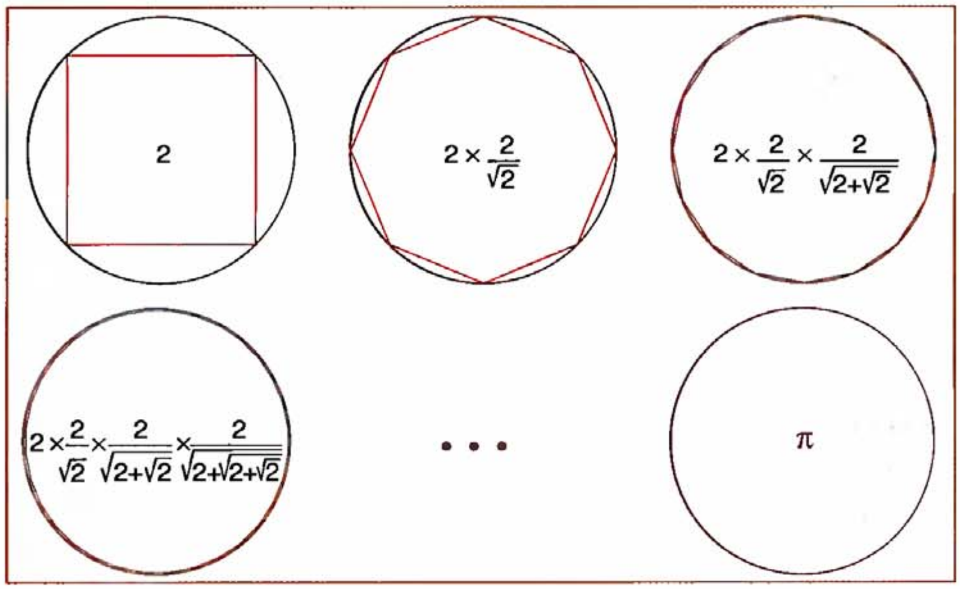
• Ludolph von Ceulen (vers 1539-1610), aussi orthographié Ludolff van Keulen (Louis de Cologne en français !), professeur de mathématiques à l'Université de Leyde, aujourd'hui aux Pays-Bas, utilise la méthode d'Archimède. Toutefois, animé d'une obstination sans égale, il la pousse plus loin que tous ses prédécesseurs. Il calcule 20 décimales de π en 1596 avec un polygone de 60×2^{33} côtés, puis 34 décimales en 1609 (il donne un encadrement dont la 35^e^ décimale est incertaine). Il demande que les décimales soient gravées sur sa tombe, qui fut malheureusement détruite au XIX^e^ siècle. En souvenir de son exploit, π est parfois appelé en Allemagne le *nombre de Ludolph*.


320.

HIC IACET SEPULTUS M^R^. LUDOLFF VAN CEULEN, PROFESSOR BELGICUS DUM VIVERET MATHEMATICARUM SCIENTIARUM IN ATHENAEO HUIUS URBIS, NATUS HILDESHEMIÆ ANNO 1540 DIE XXVIII IANUARII, ET DENATUS XXXI DECEMBRIS 1610, QUI IN VITA SUA MULTO LABORE CIRCUMFERENTIÆ CIRCULI PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRUM INVENIT SEQUENTEM :

QUANDO DIAMETER EST 1
TUNC CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS EST
QUAM 314159265358979323846264338327950288 / 100000000000000000000000000000000000
& MINUS
QUAM 314159265358979323846264338327950289 / 100000000000000000000000000000000000
SED QUANDO DIAMETER
EST 100000000000000000000000000000000000
TUM EST CIRCUMFERENTIA CIRCULI PLUS
QUAM 314159265358979323846264338327950288
& MINUS
QUAM 314159265358979323846264338327950289

Copie de l'épitaphe gravée sur la pierre tombale de Ludolph von Ceulen.



François Viète proposa une formule de produit infini pour π déduite de considérations géométriques. Soit des polygones à 2^n côtés inscrits dans un cercle de rayon 1 : on les a dessinés et on a indiqué leur aire pour n compris entre 2 et 5. Cette aire tend vers π quand n tend vers l'infini.

• À Paris, François Vièta, dit Viète (1540-1603), partant de considérations géométriques élémentaires sur la surface d'un polygone à 2^n côtés, donne la première *formule infinie* de π :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$$

Il ne s'interrogea pas sur la convergence de ce produit infini (ce genre de préoccupations ne viendra que plus tard).

Le terme 2 correspond à l'aire du carré inscrit dans un cercle de rayon 1. Le terme $2 \times 2/\sqrt{2} = 2 \times 1/\cos(\pi/4)$ correspond à l'aire de l'octogone. On multiplie par $1/\cos(\pi/8)$ pour passer au polygone à 16 côtés, puis par $1/\cos(\pi/16)$ pour passer au polygone à 32 côtés, etc. Ce résultat dérive de la formule : $\cos a = \sqrt{2\cos 2a + 2}\,/\,2$.

Voici les valeurs numériques que donne cette formule :

$V_1 = 2 \times 2/\sqrt{2} = 2{,}8284271247$

$V_2 = 2 \times 2/\sqrt{2} \times 2/\sqrt{2+\sqrt{2}} = 3{,}0614674589$

$V_3 = 2 \times 2/\sqrt{2} \times 2/\sqrt{2+\sqrt{2}} \times 2/\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}1214451522$

$V_4 = 3{,}1365484905$

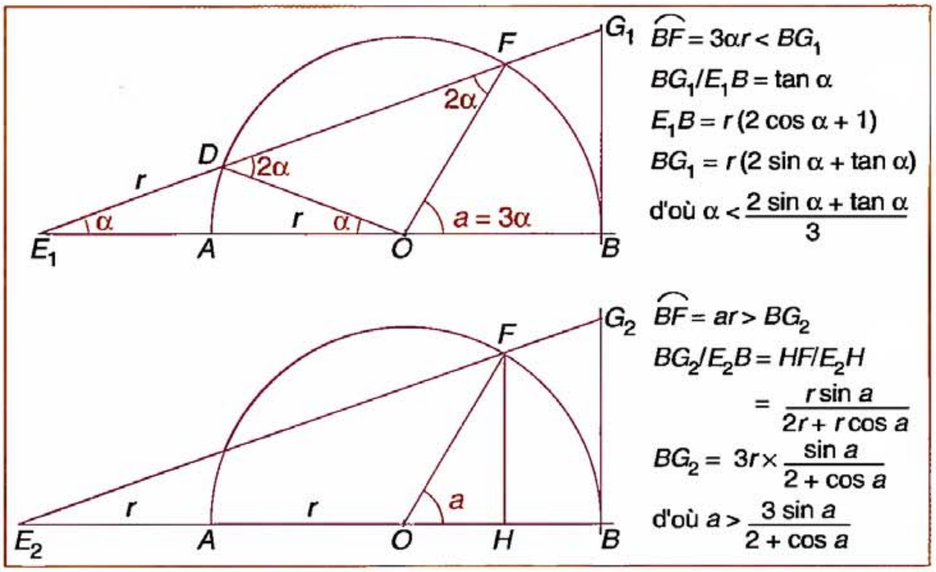
$V_5 = 3{,}1403311569$

$V_6 = 3{,}1412772509$

$V_7 = 3{,}1415138011$

Comme dans la méthode d'Archimède, on gagne trois chiffres toutes les cinq étapes. La formule de Viète n'est donc guère utile en pratique.

• En 1621, aux Pays-Bas, Wikkebrod Snellius (1580-1626) tente de minorer et de majorer un arc de cercle par des segments de droite. De ses constructions, il tire une formule d'encadrement de l'angle qui ne



Constructions géométriques de Wikkebrod Snellius, d'où on tire la formule d'encadrement : $3\sin a/(2+\cos a)<a<(2\sin a+\tan a)/3$. Pour arriver à ce résultat, Snellius admit que la longueur de l'arc *BF* est encadrée par les segments BG_1 et BG_2, mais cela ne fut démontré qu'un siècle plus tard par Christian Huygens *(ci-dessus)*. On a indiqué les grandes étapes des démonstrations conduisant aux deux inégalités.

sera démontrée qu'un siècle plus tard par Christian Huygens (1629-1693) et qu'on écrirait aujourd'hui :

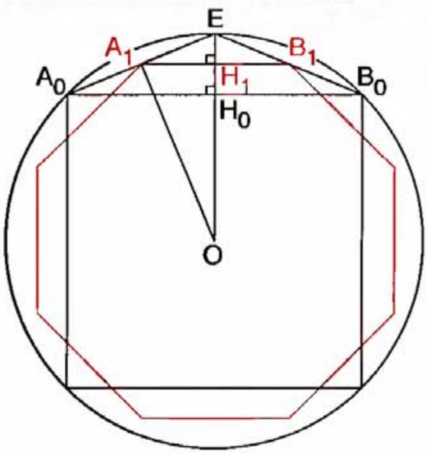
$$\frac{3\sin a}{2+\cos a} < a < \frac{2\sin a + \tan a}{3}$$

Cette formule donne un moyen de calculer π, puisque pour certaines valeurs de l'angle, par exemple de la forme $\pi/3{\times}2^{n-1}$ dans les polygones réguliers à $3{\times}2^n$ côtés, sin a, cos a et tan a s'expriment sous forme de radicaux, comme on l'a vu précédemment. En considérant seulement un découpage du périmètre d'un cercle en six arcs, on obtient par cette formule la même précision que par la méthode d'Archimède avec un polygone de 96 côtés.

La méthode des isopérimètres

• Le célèbre philosophe et mathématicien français René Descartes (1596-1650), outre ses réflexions sur *la méthode* «pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences», développa des conceptions radicales en physique, où il s'opposait à l'idée d'une *action à distance* que Newton fut pourtant contraint d'accepter un peu plus tard. Il nous a laissé un traité de géométrie très original, où le lien entre les constructions géométriques et le calcul sur des nombres réels est soigneusement mis en évidence et exploité *(voir le chapitre 9)*. L'usage d'un repère composé d'un point et de deux droites, nommé aujourd'hui *repère cartésien* bien que Descartes en ait emprunté l'idée à Apollonios de Perga (IIe siècle avant J.-C.), y est systématique.

Il n'est pas étonnant que Descartes ait également réfléchi à cette fameuse quadrature du cercle. La solution qu'il propose (et qui n'en



La méthode des isopérimètres de Descartes. On a illustré le passage du carré *(en noir)*, de côté A_0B_0, à l'octogone *(en rouge)*, de côté A_1B_1. À chaque étape, le périmètre reste le même, tandis que le rayon du cercle circonscrit diminue.

est pas vraiment une, puisqu'il n'obtient π que comme limite d'une construction infinie) est intéressante. Elle consiste à fixer une longueur de périmètre, puis à construire des polygones ayant toujours ce périmètre et possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. À la limite, cette méthode dite des *isopérimètres* donne un rayon (pour le cercle circonscrit aux polygones) qui est dans un rapport de 2π avec le périmètre fixé au départ. Voici la démonstration de cette méthode, au moyen de laquelle on trace π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite :

On considère une suite de polygones réguliers P_0, P_1, P_2, ..., P_n ayant tous le même périmètre L, le polygone P_n ayant 2^{n+2} côtés. On note A_nB_n le côté du polygone P_n, O le centre du cercle circonscrit et H_n le milieu de A_nB_n. On pose $OH_n = r_n$. Soit E le milieu de l'arc A_nB_n, A_{n+1} le milieu de la corde A_nE et B_{n+1} le milieu de la corde B_nE. $A_{n+1}B_{n+1}$ est le côté du polygone P_{n+1} et vaut $A_nB_n / 2$.

Comme les triangles $OH_{n+1}A_{n+1}$ et $A_{n+1}H_{n+1}E$ sont congruents, on a $A_{n+1}H_{n+1}{}^2 = EH_{n+1} \times H_{n+1}O$.

Sachant que $EH_{n+1} = H_{n+1}H_n = r_{n+1} - r_n$ et que $A_{n+1}H_{n+1} = A_nH_n / 2 = A_0H_0 / 2^{n+1} = r_0 / 2^{n+1}$, on obtient :

$$(r_{n+1})^2 - r_nr_{n+1} - r_0^2/4^{n+1} = 0 \qquad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + r_0^2/4^n}}{2}$$

En construisant ces polygones successifs de même périmètre, on obtient des cercles circonscrits concentriques qui, si l'on part d'un hexagone de côté 1 (c'est-à-dire si l'on fixe le périmètre des polygones à 6), ont un rayon qui converge vers 3/π. La convergence des approximations ainsi obtenues est équivalente à celles des méthodes d'Archimède ou de Viète : on gagne trois chiffres toutes les cinq étapes.

Histoire de π au temps de l'analyse

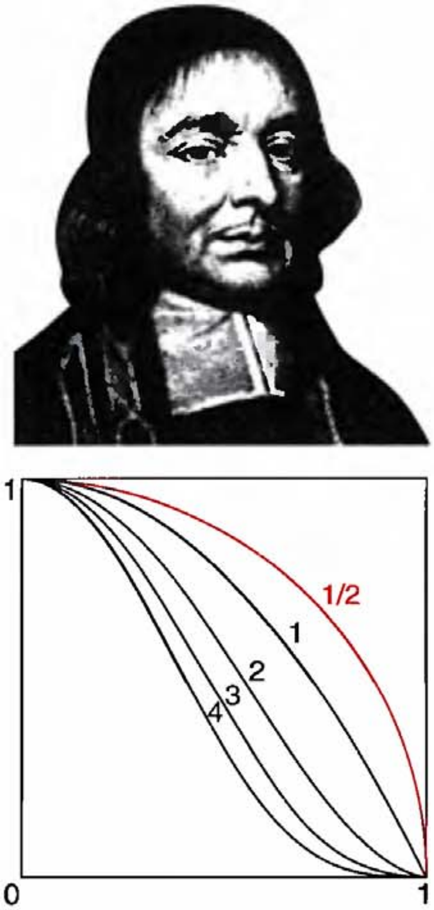
Les formules infinies

4

La naissance de l'analyse moderne (calcul différentiel et intégral) est l'occasion de la découverte de nouvelles définitions de π qui se dégagent de la géométrie. Les formules trouvées sont désormais purement arithmétiques : produits, sommes ou fractions infinis. Dans un premier temps, ces formules, considérées comme des quadratures numériques, ne présentent guère d'intérêt pratique, car elles convergent trop lentement. Toutefois ces progrès profonds conduisent peu après aux puissantes formules des arcs tangentes, qui domineront jusqu'en 1973, suivies aujourd'hui par d'autres formules, elles aussi déduites de l'analyse. Le π que l'on découvre est un nouvel être mathématique pur, dont la composante géométrique est devenue secondaire : ainsi, seul un lien très indirect rattache le cercle et la somme $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$, qui vaut $\pi/4$. Dans ce chapitre, on retrouve les noms des «grands» des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, Leibniz, Newton, Euler, qui ont tous, à un moment ou un autre, médité π et succombé à ses charmes.

John Wallis

John Wallis (1616-1703), nommé professeur à Oxford en 1649 pour avoir déchiffré des lettres secrètes pendant la guerre civile, participa à la fondation de la *Royal Society*. Il soutint la doctrine de la circulation du sang de William Harvey, publia les grandes œuvres classiques de l'Antiquité et contribua à détacher l'algèbre et l'arithmétique des représentations géométriques. Il montra que la prétendue solution de Thomas Hobbes au problème de la quadrature du cercle était fausse *(voir page 13)*. Il contribua aussi au développement de nos notations mathématiques modernes ; on lui doit en particulier les symboles «<», «>» (pour la comparaison des nombres) et «∞» (pour l'infini). Son travail sur les produits infinis anticipe le calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz. Newton étudia d'ailleurs soigneusement les œuvres de Wallis, qui furent un élément déterminant de sa formation.



John Wallis (1616-1703). On a représenté, pour différentes valeurs de h, les courbes de la forme $y = (1 - x^2)^h$ que Wallis utilisa pour découvrir sa formule de produit infini. Pour $h = 1/2$ *(en rouge)*, la courbe est un arc de cercle.

John Wallis trouva la formule de produit infini suivante, publiée en 1655 dans son ouvrage *Arithmetica Infinitorum* :

$$\pi = 2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \cdots$$

Moyennant quelques transformations algébriques, on peut aussi l'écrire de la manière suivante :

$$\pi = 2 \prod_{p=1}^{\infty} \frac{4p^2}{(2p-1)(2p+1)} = 2 \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4p^2}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} \times n!^4}{n\,(2n)!^2}$$

La démonstration de cette formule par des méthodes modernes est donnée à l'annexe 1, page 75, mais la méthode par laquelle Wallis a trouvé cette formule est très éloignée de cette démonstration.

Sa démarche «algébrico-géométrique» consiste à étudier l'aire d'un quart de cercle, dont il sait que l'équation est $y^2 = 1 - x^2$ ou encore $y = (1 - x^2)^{1/2}$. Pour cela, il considère les aires délimitées par les courbes $y = (1 - x^2)^{h/2}$ pour différentes valeurs de h : en utilisant le principe du découpage en *petits rectangles* et grâce à la maîtrise qu'il avait acquise auparavant des sommes $S_p = 1 + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, il réussit à connaître certaines propriétés de ces courbes qui l'amènent alors à sa formule. C'est une sorte d'affreux bricolage dont les détails seraient assez difficiles à justifier avec nos critères de rigueur actuels. Quoi qu'il en soit, ces bricolages le conduisent à la magnifique formule de π comme produit infini que l'on n'oubliera plus par la suite, même si on préférera la démontrer autrement.

Cette formule est vraiment très belle : c'est la première formule infinie représentant π sans radicaux (contrairement à celle de Viète). Malheureusement, elle ne permet pas d'aller bien loin dans le calcul de π.

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} = 2{,}8444444444$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} = 2{,}9257142857$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \frac{8\times 8}{7\times 9} = 2{,}9721541950$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \frac{8\times 8}{7\times 9} \times \frac{10\times 10}{9\times 11} = 3{,}0021759545$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \frac{8\times 8}{7\times 9} \cdots \frac{50\times 50}{49\times 51} = 3{,}1260789002$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \frac{8\times 8}{7\times 9} \cdots \frac{500\times 500}{499\times 501} = 3{,}1400238186$$

$$2 \times \frac{2\times 2}{1\times 3} \times \frac{4\times 4}{3\times 5} \times \frac{6\times 6}{5\times 7} \times \frac{8\times 8}{7\times 9} \cdots \frac{5000\times 5000}{4999\times 5001} = 3{,}1414355935$$

La convergence est particulièrement lente : pour avoir trois chiffres exacts, il faut faire un nombre considérable de multiplications.

William Brouncker


William Brouncker (1620-1684).

William Brouncker (1620-1684) fut, avec Wallis, un fondateur de la Royal Society et il en fut le président. Il utilisait des expressions de la forme :

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1} \qquad a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2}} \qquad a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{\dots}{\dots + b_n}}}$$

nommées *fractions continues*. On considère la limite de ces expressions comme une sorte de *fraction infinie*, que l'on note :

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{\dots}{\dots + \cfrac{b_n}{a_n + \cdots}}}}$$

On utilise aussi la notation plus commode, sur une seule ligne :

$$a_0 + b_0 / (a_1 + b_1 / (a_2 + b_2 / (a_3 + \dots + b_n / (a_n + \dots))\dots)$$

En transformant la formule de Wallis, Brouncker proposa la belle formule :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{\dots}{\dots + \cfrac{(2n+1)^2}{2 + \cdots}}}}}$$

Quand, dans une fraction continue, les b_i sont égaux à 1, on parle de *fraction continue régulière* et, au lieu d'écrire :

$$a_0 + 1 / (a_1 + 1 / (a_2 + 1 / (a_3 + \dots + 1 / (a_n + \dots)))$$

on note : $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$

À tout nombre est associé une fraction continue régulière. Pour l'obtenir, on commence par écrire le nombre sous la forme d'un entier suivi d'un nombre plus petit que 1 :

$$\pi = 3 + 0{,}14159\dots$$

puis on considère l'inverse du nombre plus petit que 1 (qui, lui, est plus grand que 1) et on l'écrit lui aussi sous la forme d'un nombre entier suivi d'un nombre plus petit que 1 :

$$\pi = 3 + 1 / 7{,}0625\dots = 3 + 1/(7 + 0{,}0625\dots),$$

et on continue ainsi jusqu'à ce que la partie décimale soit l'inverse d'un nombre entier ou jusqu'à l'infini. Pour certains, ce développement en *fraction continue régulière* est une façon aussi naturelle de représenter un nombre que le développement en base dix auquel nous accordons pourtant une prépondérance absolue. On raconte que l'extraordinaire mathématicien indien Srinivasa Ramanujan *(dont nous parlerons au chapitre 7)* pensait les nombres en termes de fractions continues et que cela expliquerait en partie les résultats étonnants qu'il a obtenu.

On a démontré une propriété remarquable concernant les fractions continues : un nombre est rationnel (c'est-à-dire est le rapport de deux entiers) si et seulement si sa fraction continue régulière est finie.

Or π est irrationnel, et s'écrit donc sous la forme d'une fraction continue régulière infinie. Cette fraction a-t-elle au moins une forme simple ? L'irrationalité de π signifie que la suite de ces décimales ne présente aucune périodicité. Toutefois l'absence de motif répété dans le développement en base dix de π ne permet pas de conclure *a priori* à la non-périodicité de son développement en fraction continue régulière : ainsi le nombre irrationnel $\sqrt{3}$ a un développement décimal non périodique et une fraction continue régulière simple, qui s'écrit [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]. Malheureusement, on n'a pour l'instant découvert aucune périodicité ni aucun motif dans le développement en fraction continue régulière de π.

La fraction continue régulière de π s'écrit :

$\pi = 3 + 1 / (7 + 1 / (15 + 1 / (1 + 1 / (292 + 1 / (1+ ....)))))$

$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, ...]$.

En ne considérant qu'un nombre fini d'éléments de ce développement, on obtient des fractions (nommées *réduites*) qui sont de très bonnes approximations de π :

$$\frac{3}{1} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{333}{106} \quad \frac{355}{113} \quad \frac{103\,993}{33\,102} \quad \frac{104\,384}{33\,215} \quad \frac{208\,341}{66\,317} \quad \frac{312\,689}{99\,532} \quad \dots$$

On ne peut améliorer aucune de ces approximations en prenant un dénominateur plus petit, quel que soit le numérateur : ainsi, toute fraction construite avec un dénominateur plus petit que 113 sera plus éloignée de π que 355/113. Si toute réduite de π est une *meilleure fraction* pour π, l'inverse n'est pas vrai : il existe des *meilleures fractions* pour π qui ne sont pas des réduites de π. C'est le cas de 311/99.

Citons encore quelques belles fractions continues liées à π :

$4/\pi = 1 + 1^2/(3 + 2^2/(5 + 3^2/(7 + 4^2/(9 + ...))))$

$\pi = 3 + 1^2/(6 + 3^2/(6 + 5^2/(6 + 7^2/(6 + ...))))$

$\pi/2 = 1 + 2/(3 + 1\times3/(4 + 3\times5/(4 + 5\times7/(4 + ...))))$

$\pi/2 = 1 + 1/(1 + 1\times2/(1 + 2\times3/(1 + 3\times4/(1 + ...))))$

$16/\pi = 5 + 1^2/(10 + 3^2/(10 + 5^2/(10 + 7^2/(10 + ...))))$

$1 + 4/\pi = 2 + 1^2/(2 + 3^2/(2 + 5^2/(2 + 7^2/(10 + ...))))$

$6/(\pi^2 - 6) = 1 + 1^2/(1 + 1\times2/(1 + 2^2/(1 + 2\times3/(1 + 3^2/(1 + 3\times4/(1 + ...)))$

$\pi/2 = 1 - 1/(3 - 2\times3/(1 - 1\times2/(3 - 4\times5/(1 - 3\times4/(3 - 6\times7/(1 - ...))))$

$12/\pi^2 = 1+ 1^4/(3 + 2^4/(5 + 3^4/(7 + 4^4/(9 + ...))))$

James Gregory


James Gregory (1638-1675).

Le mathématicien écossais James Gregory (1638-1675), professeur à l'Université de Saint Andrews puis à celle d'Édimbourg, fut notamment l'inventeur d'un télescope à miroir secondaire concave. Il tenta en vain de démontrer que le problème de la quadrature du cercle était impossible à résoudre ; il prétendit même avoir réussi et publia une démonstration qui ne persuada ni Huygens, ni Leibniz. Notons que, dès cette époque, même si la théorie mathématique n'était pas mûre, l'idée d'une démonstration d'impossibilité de la quadrature du cercle était envisagée.

James Gregory a aussi découvert la formule suivante :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

par une méthode que l'on interprète aujourd'hui comme le calcul de $\arctan(x)$ en tant que primitive de $1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$ Après qu'on eut appris à l'exploiter, cette formule fut la base des calculs de π durant plusieurs siècles.

En prenant $x = 1$, on obtient l'extraordinaire somme infinie :

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Malheureusement, Gregory ne l'a jamais écrite explicitement. Peut-être est-ce parce qu'il avait compris qu'elle n'était guère utile pour calculer π. En effet :

$$4\,(1 - 1/3 + 1/5) = 3{,}4666666666$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7) = 2{,}8952380952$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/\,11) = 2{,}9760461760$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/\,101) = 3{,}1611986129$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/\,1\,001) = 3{,}1435886595$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/\,10\,001) = 3{,}1417926135$$
$$4\,(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/\,100\,001) = 3{,}1416126531$$

La convergence est exécrable ! On parle de convergence logarithmique : le nombre d'étapes pour gagner un chiffre devient de plus en plus grand. Concrètement, cela signifie qu'en poursuivant le calcul des approximations en prenant un terme de plus à chaque étape, la courbe que dessinent les premières décimales rouges est une sorte de parabole.

La formule de $\arctan(x)$ de Gregory sera ultérieurement utilisée pour le calcul de π, mais avec des valeurs de x inférieures à 1, car plus x est proche de 0, mieux elle converge.

En fait, la formule pour π avait déjà été proposée vers 1410 par le mathématicien indien Madhava, mais elle était restée inconnue en Occident.

Gregory proposa aussi une méthode itérative de calcul de π qui, comme celle d'Archimède, utilise des polygones réguliers à n côtés, mais qui fait intervenir l'aire au lieu du périmètre. Si l'on note A_n et B_n les aires des polygones réguliers inscrit dans le cercle de rayon 1 et circonscrit à ce cercle, on trouve les relations :

$$A_{2n} = \sqrt{A_n B_n} \qquad B_{2n} = \frac{2B_n A_{2n}}{(B_n + A_{2n})}$$

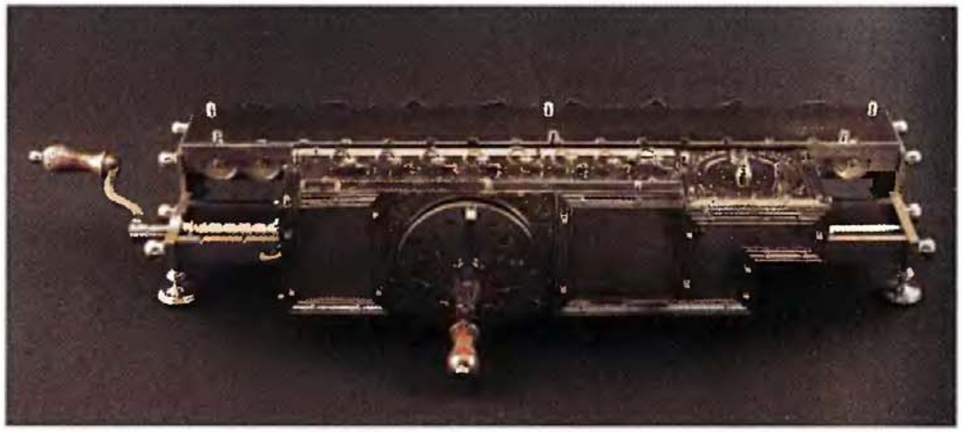
qui conduisent à des calculs beaucoup plus efficaces que ceux de la série de Gregory, mais ne donnent guère mieux que la méthode d'Archimède elle-même.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Le grand Leibniz (1646-1716) fut à la fois philosophe, mathématicien et... informaticien. Il est surtout connu pour avoir élaboré un système philosophique qu'il désigna lui-même sous le nom de «monadologie» et inventé le calcul différentiel (en même temps que Newton, ce qui engendra une amère controverse entre les deux hommes), mais il améliora également la machine à calculer de Pascal (la «Pascaline»), d'une part en concevant un *cylindre cannelé* permettant de mémoriser les données d'une opération que l'on doit effectuer plusieurs fois (ce qui est essentiel pour les multiplications par additions répétées), d'autre part en imaginant un système de chariot pour effectuer sans peine les décalages de chiffres intervenant dans les multiplications ou les divisions par 10.

Dans ses travaux, Leibniz n'hésite plus à recourir à des passages à la limite ; en 1674, il propose la formule de π que Gregory était sur le point d'écrire. Cette formule, que certains nomment *formule de Gregory,* et d'autres *formule de Leibniz,* (et que je choisis de nommer formule de Madhava-Gregory-Leibniz) ne fut pas la seule rencontre de l'inventeur du calcul différentiel avec π.



La machine de Hanovre, construite en 1694 par Leibniz, comporte un tambour aux dents inégales coulissant sur un axe, qui sert à mémoriser mécaniquement le nombre à multiplier.

Par transformation de la première série, il obtient cette seconde expression :

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots\right) = 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

qui converge légèrement plus vite que l'autre, mais n'est pas vraiment utile non plus pour le calcul de π.

Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) est l'inventeur du *calcul des fluxions*, que nous appelons aujourd'hui *calcul différentiel* (et dont Leibniz lui disputa la paternité, comme nous l'avons vu) ; il est aussi le découvreur de la loi d'attraction universelle, raison pour laquelle son nom désigne l'unité de force dans le système international.

Isaac Newton (1642-1727).

Ses travaux sur les dioptres, et la construction d'un télescope lui valent d'entrer en 1672 à la *Royal Society*, institution dont il devient président en 1703. À sa mort en 1727, il est inhumé à Westminster.

Newton trouva une nouvelle et intéressante formule de calcul de π. Voici le chemin qu'il a suivi. Partons de la formule du binôme :

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+x^n \quad \text{avec} \binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

On peut aussi l'écrire : $(1+x)^n =$

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}x^p+..+x^n$$

Ce qui semble généralisable en remplaçant l'entier n par un nombre quelconque a si on prolonge la formule à l'infini : $(1+x)^a =$

$$1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{2\times 3}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-p+1)}{p!}x^p+\cdots$$

Ayant remarqué que la dérivée de arcsin(x) est $(1-x^2)^{-1/2}$, on en déduit un développement de arcsin(x) en somme infinie :

$$\arcsin(x) = x+\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\times 3\times\ldots(2p-1)}{2\times 4\times\ldots(2p)}\times\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\cdots$$

D'où, en prenant $x = 1/2$, la formule suivante pour π :

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1\times 3\times\cdots(2p-1)}{2\times 4\times\cdots(2p)}\times\frac{1}{2p+1}\times\frac{1}{2^{2p+1}}+\cdots\right)$$

Cette formule converge rapidement :

$N_1 = 6(1/2 + 1/2\times 1/3\times 1/2^3) = 3{,}12500000000000000000$
$N_5 = 3{,}14157671577486640963203463203463203463 2$
$N_{10} = 3{,}14159264687556079607822377507885066 7018$
$N_{20} = 3{,}14159265358979070504702871491957876 0550$
$N_{50} = 3{,}14159265358979323846264338327950228 6255$

Là encore, on gagne trois chiffres en cinq étapes, comme avec la méthode des polygones d'Archimède.

Par une méthode analogue, Newton trouve cette autre expression de π, plus compliquée, mais qu'il utilise avec 22 termes, ce qui lui donne 16 décimales exactes de π :

$$\pi = \frac{\sqrt{27}}{4} + 24\left(\frac{1}{3\times 2^2} - \frac{1}{2\times 5\times 2^4} - \frac{1}{2\times 4\times 7\times 2^6} - \dots \right.$$
$$\left. \dots - \frac{1\times 3\times \dots (2p-1)}{2\times 4\times \dots (2p+2)} \times \frac{1}{2p+5} \times \frac{1}{2^{2p+4}} - \dots \right)$$

James Stirling

James Stirling (1692-1770), dit le Vénitien, est renvoyé d'Oxford à cause de ses relations avec les partisans des Stuart. Il termine donc ses études à Venise, ce qui explique son surnom. Son œuvre mathématique est un complément aux travaux de Newton. On lui doit un développement de ln $n!$ (et donc de $n!$) qui, étrangement, fait intervenir les nombres e et π. Voici cette belle relation entre $n!$, e et π (dont une démonstration est donnée en annexe, page 76) :

$$n! \underset{n\to\infty}{\approx} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

John Machin

John Machin (1680-1752), professeur d'astronomie à Londres, découvre en 1706 la formule $\pi = 4\,(4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239))$. En utilisant le développement de arctan *(x)* de Gregory, on obtient :

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4\,(-1)^k}{(2k+1)\times 5^{2k+1}} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)\times 239^{2k+1}} \right)$$

Grâce à cette formule, Machin est le premier mathématicien à calculer 100 décimales de π :

M_0 = 4 (4/5 – 1/239) =
= 3,18326359832635983263598326359832635983
M_1 = $4\,(4/5 - 1/239 - 4/(3\times 5^3) + 1/(3\times 239^3))$ =
= 3,140597029326060314304531106579228898150
M_2 = 3,141621029325034425046832517116408069706
M_3 = 3,141591772182177295018212291112329795026
M_4 = 3,141592682404399517240259836073575860490
M_5 = 3,141592652615308608149350747666502755368
M_{10} = 3,141592653589793294747374857715343543379
M_{20} = 3,141592653589793238462643383279818132087

L'erreur est divisée par 25 à chaque nouveau terme, soit 1,4 chiffre gagné en moyenne.

John Machin (1680-1752).

La notation de π

William Oughtred (1574-1660).

En 1647, William Oughtred (1574-1660), puis Isaac Barrow (1630-1677), le maître de Newton, utilisent la notation π pour désigner le périmètre d'un cercle de rayon R. Cette abréviation n'est pas étonnante puisque Archimède, dans son traité *De la mesure du Cercle*, désigne la longueur de la circonférence par le mot περιμετροζ («périmètre»).

En 1706, William Jones publie *A New Introduction to Mathematics*, où il utilise la lettre π pour désigner cette fois le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. À cette même époque, Jean Bernoulli utilise la lettre c. En 1747, Euler utilise la lettre p, puis en 1736, dans sa correspondance, la lettre c. Toutefois, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, publiée en latin en 1748, Euler utilise la lettre π. Le succès de cet ouvrage imposera définitivement la notation.

Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) est considéré par certains historiens des sciences comme le plus grand mathématicien de tous les temps. Né à Bâle en 1707, il étudie la théologie et les mathématiques, et il reçoit l'enseignement de Jean Bernoulli. Sa mémoire est prodigieuse, tout autant que ses capacités de calcul. On raconte qu'au cours d'une nuit d'insomnie, il calcula de tête les puissances sixièmes de tous les entiers entre 1 et 100, et que, plusieurs jours après, il se souvenait encore des résultats. Cette aptitude extraordinaire lui permet d'ailleurs de réfuter la conjecture de Fermat selon laquelle les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ sont tous des nombres premiers. Il trouve en effet que $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297 = 6\,700\,417 \times 641$.

Son œuvre est considérable : on a calculé qu'il a publié environ 800 pages de textes scientifiques par an. La série de ses œuvres complètes, éditée à l'occasion du 200e anniversaire de sa naissance, comporte 75 volumes de 600 pages, et pourtant elle n'inclut pas les lettres (plus de 4 000) qu'il échangea avec les frères Bernoulli, Christian Goldbach et bien d'autres mathématiciens fameux.

Il découvrit de multiples formules faisant intervenir π, dont celle-ci, d'une grande simplicité :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\pi = \sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \cdots} = \left(6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

Leonhard Euler (1707-1783).

Le premier raisonnement qui le conduit à cette formule ne répond pas aux critères de rigueur actuels, mais il est remarquable d'ingéniosité. Partant du développement : $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$, Euler effectue la substitution $x^2 = y$ après avoir factorisé x, et considère l'équation $0 = 1 - y/3! + y^2/5! - y^3/7! + \ldots$, dont il connaît les solutions non nulles, puisque c'est l'équation $\sin \sqrt{x} = 0$. Ces solutions sont : $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$

Euler sait par ailleurs que, dans une équation polynomiale du type $1 + a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ny^n = 0$, la somme des inverses des racines est $-a_1$. Il considère qu'il doit en être de même pour son équation polynomiale infinie, ce qui lui permet d'écrire $1/3! = 1/\pi^2 + 1/(2\pi)^2 + 1/(3\pi)^2 + \ldots + 1/(n\pi)^2 + \ldots$ En multipliant les deux membres de l'équation par π^2, on obtient $\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$

Une démonstration moins rapide, mais complète, de cette formule est donnée en appendice page 200. Aussi belle qu'elle soit, la formule d'Euler n'est que très lentement convergente :

$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4} = 2{,}73861278$$
$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + 1/9} = 2{,}85773803$$
$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + \cdots + 1/16} = 2{,}92261298$$
$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + \cdots + 1/25} = 2{,}96338770$$
$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + \cdots + 1/100^2} = 3{,}13207653$$
$$\sqrt{6} \times \sqrt{1 + 1/4 + \cdots + 1/1\,000^2} = 3{,}14063805$$

Par une méthode du même type, Euler trouve que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Plus tard, par une autre méthode, il réussit à calculer les sommes de la forme suivante, qui font toutes intervenir π *(voir les formules page 201 et suivantes)* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$$

Euler découvrit aussi l'étonnante relation $e^{i\pi} = -1$, qui orne l'entrée de la salle π du Palais de la Découverte, à Paris *(voir page 82)*, et qui, par le lien qu'elle établit entre les quatre constantes *e*, *i*, π et -1, semble plus que toute autre un résumé de mystère et de profondeur. Des variantes de cette formule sont données dans un tableau, page 201.

On doit aussi à Euler le développement suivant :

$$\arctan(x) = \frac{x}{1+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\times 4}{3\times 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\times 4\times 6}{3\times 5\times 7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \cdots\right)$$

On démontre cette formule en posant :

$$y = x^2/(1+x^2) \qquad z(y) = [(1+x^2)\arctan(x)]/x$$

puis en vérifiant que : $\quad 2z'(y - y^2) + z(1 - 2y) = 1$

Ensuite, en remplaçant dans cette équation $z(y)$ par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$

et en exploitant les relations qui en résultent entre les a_n, on obtient le développement indiqué.

En prenant $x = 1$, on a la belle formule :

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7\times 9} + \cdots\right)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 2\times \ldots n}{1\times 3\times \ldots (2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n\,!)^2}{(2n+1)\,!}$$

$E_1 = 2\,(1 + 1/3)$ = 2,66666666666666666666666666666666666666
$E_2 = 2\,(1 + 1/3 + 2/15)$ = 2,93333333333333333333333333333333333333
E_5 = 3,12150072150072150072150072150072150
E_{10} = 3,14110602160137763852934131571902469 7
E_{50} = 3,14159265358979302165554705362722996 3
E_{100} = 3,14159265358979323846264338327936493 6

Asymptotiquement, on gagne 0,3 chiffre par terme supplémentaire.

Bien sûr, Euler s'est amusé au calcul de π ; par exemple, il obtint 20 décimales de π en une heure en utilisant le développement de arctan*(x)* indiqué précédemment avec la formule $\pi/4 = 5 \arctan 1/7 + 2 \arctan 3/79$.

Annexe 1 : démonstration de la formule de Wallis

Voici les démonstrations classiques des formules de Wallis et de Stirling (que nous adaptons du cours *d'Analyse* de J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse).

Posons : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, et effectuons une intégration par partie :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x\, dx = \left[\sin x\ \cos^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx$$

En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on trouve :

$W_n = (n-1)\,(W_{n-2} - W_n)$ et finalement : $n\, W_n = (n-1)\, W_{n-2}$

En exprimant W_n en fonction de W_0 et W_1, on obtient :

$$W_{2p} = W_0 \frac{1\times 3\times 5\times \ldots (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots 2p} = \frac{\pi}{2}\times \frac{(2p)\,!}{2^{2p}\,(p\,!)^2}$$

$$W_{2p+1} = W_1 \frac{2\times 4\times 6\times \ldots 2p}{3\times 5\times 7\times \ldots (2p+1)} = \frac{2^{2p}\,(p\,!)^2}{(2p+1)\,!} = \frac{\pi/2}{(2p+1)\, W_{2p}}$$

Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\cos^{n+1} x \leq \cos^n x$, d'où $W_{n+1} \leq W_n$ et $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$

En utilisant l'égalité $W_{n+2} / W_n = (n+1)/(n+2)$, où le second terme tend vers 1 quand n tend vers l'infini, dans l'inéquation :

$$0 < W_{n+2} / W_n \leq W_{n+1} / W_n \leq 1,$$

on déduit que W_{n+1} / W_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini (puisque la borne inférieure de ce rapport tend vers 1).

Avec les expressions trouvées plus haut de W_{2p} et W_{2p+1}, il vient :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times \ldots 2p)^2}{(1\times 3\times 5\times \ldots (2p-1))^2}\frac{1}{2p+1}=\frac{\pi}{2}$$

Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\pi = 2\,\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\cdots = 2\prod_{i=1}^{\infty}\frac{4i^2}{(2i-1)(2i+1)} = 2\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4i^2}\right)^{-1}$$

En réécrivant numérateurs et dénominateurs et en prenant la racine carrée, on obtient une relation utile pour la formule de Stirling :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n\,!)^2}{(2n)\,!\,\sqrt{n}}$$

Annexe 2 : démonstration de la formule de Stirling

Considérons la suite de terme général $S_n = (n + 1/2)\ln n - n - \ln n!$, qui est la somme partielle de la série de terme général u_k définie par $u_1 = -1$ et $u_k = S_k - S_{k-1}$, d'où, en simplifiant : $u_k = -(k - 1/2)\ln(1 - 1/k) - 1$

Un développement limité à l'ordre 3 du logarithme donne que $u_k \approx 1/12k^2$; la série est donc convergente.

Soit L sa somme. En prenant l'exponentielle des S_n, on obtient :

$$\exp(S_n) = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n\,!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(L) \quad \text{d'où : } n! \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{1}{\exp(L)}\,n^{n+1/2}e^{-n}$$

On a alors les deux égalités suivantes, que l'on utilise avec la formule de Wallis pour connaître exp(L) :

$$(2n)\,! \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{1}{\exp(L)}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n} \qquad (n\,!)^2 \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{1}{\exp^2(L)}\,n^{2n+1}e^{-2n}$$

$$\exp(L) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)\,!\,n^{1/2}}{(n\,!)^2\,2^{2n+1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{d'où : } n\,! \underset{n\to\infty}{\approx} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et : } \pi = \lim_{n\to\infty}(n\,!)^2\,\frac{e^{2n}}{2n^{2n+1}}$$

Toutefois cette formule n'est pas très bonne pour calculer π.

Moyennant un peu de travail supplémentaire on obtient :

$$n\,! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51\,840n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \text{avec } o(1/n^3)\times n^3 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Concernant les rapports étranges entre $n!$ et π, notons encore que la fonction :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

qui coïncide avec $n!$ pour toutes les valeurs entières de x (pour n entier, $\Gamma(n + 1) = n\,!$) vérifie de nombreuses relations faisant intervenir π, dont :

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ $\quad\Gamma(1/2)\,\Gamma(-1/2) = -2\pi$ $\quad\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x + 1/2)$

Du calcul à la main à l'ère des machines

Le règne des arcs tangentes

La connaissance de π que donne l'analyse conduit à des méthodes de calcul parfois efficaces ; ainsi John Machin, grâce à sa formule, fut le premier à accéder à la centième décimale. Les principaux mérites de ses successeurs furent la patience et la persévérance. Nous retraçons rapidement leur histoire un peu monotone : tous utilisent des formules d'arcs tangentes et noircissent d'innombrables feuilles de papier. Nous nous arrêtons au record de Jean Guilloud et Martine Bouyer qui, en 1973, furent les premiers à atteindre un million de décimales, ce qui clôt une époque assez peu créative de l'histoire de π. Vers 1945, la mise au point des calculateurs électroniques provoqua une petite révolution chez les chasseurs de décimales ; toutefois, contrairement à ce qu'on pense trop fréquemment, cela ne fit que rendre la compétition plus intéressante, avant de la rendre franchement passionnante (on le vérifiera dans les chapitres suivants). Programmer un ordinateur, comme on s'en aperçut dès les années 1950, est en effet une tâche qui demande une compréhension mathématique toujours plus approfondie, dont nous n'avons sans doute aujourd'hui que les prémisses.

Les motivations des chasseurs de décimales

Une fois les 30 premières décimales de π connues, ce qui suffit à toutes les applications envisageables, la principale motivation des calculateurs de π devint la recherche d'une périodicité dans ses décimales, jusqu'à ce que Johann Lambert, en 1761, démontre que π est irrationnel. En effet, la découverte d'une telle périodicité aurait valu à son auteur un double triomphe : d'une part, tout calcul supplémentaire de π serait devenu inutile, et l'on aurait crédité l'heureux découvreur d'avoir calculé «une infinité de décimales de π», c'est-à-dire incomparablement plus que tous ses prédécesseurs ! D'autre part, cette périodicité aurait signifié que π est rationnel, c'est-à-dire qu'il correspond au rapport de deux entiers, car un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique au-delà d'un certain chiffre *(voir page 148)*. L'écriture de π sous la forme d'un rapport d'entiers aurait immédiatement conduit à une solution du problème de la quadrature du cercle, problème glorieux s'il en fut.

Après 1761, les motivations des chasseurs de décimales sont moins claires. S'agissait-il :
• de prouver, en trouvant une période, que les mathématiciens, malgré leurs savants raisonnements, se trompent ?
• de repérer dans π une autre forme de régularité que la périodicité, qui donne la connaissance des décimales jusqu'à l'infini (car rien ne s'oppose à ce que les décimales d'un nombre irrationnel présentent un certain motif, comme c'est le cas pour le nombre irrationnel 0,199111999911111999991..., où chaque bloc de 1 ou de 9 a un chiffre de plus que le précédent) ?
• d'être le premier à fouler une terre (mathématique) vierge ?
• de battre un concurrent ?
• de faire quelque chose d'utile, même si on ne sait pas vraiment à quoi : les décimales de π trouveront-elles un jour preneur ? On invoque souvent une hypothétique utilité future pour justifier la poursuite de recherches mathématiques dans de nombreuses spécialités où aucune application n'est en vue.

Quand l'ère des machines sera venue, on prétendra que calculer les décimales de π fournit des *suites aléatoires* utiles pour le fonctionnement de certains algorithmes (fondés sur ce qu'on nomme les méthodes de Monte-Carlo), ou que ce calcul sert à contrôler le bon fonctionnement des machines. Toutefois aucun de ces nouveaux arguments n'est vraiment convaincant. D'une part, rien aujourd'hui ne permet d'affirmer que π est aléatoire *(plusieurs arguments s'y opposent même ; voir le chapitre 10)*. Quant aux prétendus tests, ils ne sont pas très sérieux : il existe 1 000 autres façons de tester une machine ou un logiciel, dont un grand nombre sont meilleures car elles font intervenir des séquences d'opérations plus variées que celles des programmes de calcul de π. (On signale cependant quelques identifications d'erreur grâce à un calcul de décimales de π : David Bailey rapporte un cas en 1988 sur un ordinateur *Cray-2*.)

Je crois qu'il est plus honnête, pour justifier cette course permanente aux décimales de π, de la considérer tout simplement comme un défi, non moins intéressant que l'ascension de l'Everest et méritant autant d'attention que le record cycliste de l'heure ou celui de saut à la perche (eux aussi toujours susceptibles d'améliorations). Si, pour avancer dans la suite infinie des chiffres de π, on doit élaborer de nouvelles machines et découvrir de nouvelles mathématiques, et si ces avancées sont utiles à autre chose, tant mieux. Toutefois la simple joie de progresser un peu dans une tâche difficile est une justification en elle-même.

Dans certains cas, la recherche abstraite de méthodes de calcul efficaces des décimales de π a eu des retombées concrètes intéressantes, comme je l'indiquerai au chapitre 7. En outre, cette recherche participe au mouvement général du progrès mathématique qui, personne n'en doute cette fois, est utile et n'a pas à être justifié ; aussi pourquoi aurions-nous des états d'âmes ?

De von Ceulen aux drôles de «7» de William Shanks

Après le record de Ludolff von Ceulen qui, par une utilisation forcenée de la méthode d'Archimède *(voir page 61)*, avait réussi à calculer 34 décimales de π en 1609, l'astronome Abraham Sharp (1651-1742), utilisant une formule d'arc tangente, calcule 72 décimales de π, peu avant que John Machin – grâce à sa fameuse décomposition – atteigne la centième décimale en 1706. Il est battu en 1719 par le Français Thomas Fantet de Lagny (1660-1734), qui en calcule 27 de plus.

Le record du Français tient jusqu'en 1794, quand le Baron autrichien Georg von Vega (1754-1802), utilisant une formule d'arc tangente découverte par Euler, calcule 140 décimales, ce qui révèle d'ailleurs que la décimale 113 du Français est fausse : là où de Lagny avait écrit «7», il aurait dû écrire «8» !

Signalons également un mystérieux manuscrit anonyme donnant 154 décimales de π dont 152 exactes ; il fut découvert par F. X. von Zach à la fin du XVIII[e] siècle dans la bibliothèque Radcliffe, à Oxford.

Durant cette période, le souvenir d'Archimède est maintenu vivant à l'autre bout du monde. C'est en effet par sa méthode que les Japonais, ignorants des progrès de l'analyse, battent leurs records nationaux : au moyen d'un polygone de 1 024 côtés, Takebe Katahiro calcule 41 décimales de π en 1722 ; puis Matsanuga en calcule 50 en 1739.

Au XIX[e] siècle, la chasse aux décimales se professionnalise quelque peu, et la méthode qu'utilise le Viennois L. K. Schulz von Strassnitzky (1803-1852) n'est pas totalement loyale : il n'effectue pas les calculs lui-même, mais les sous-traite au calculateur prodige Johann Martin Zacharias Dahse, qui réussit à atteindre la 200[e] décimale de π en 1844 après deux mois de travail.

Les capacités de calcul de Dahse étaient extraordinaires : il percevait instantanément les nombres et pouvait les mémoriser sans aucun effort.


3, 141592653589793238462643383279502
884197169399375105820974944592307816
40628620899862803482534211170679821480
865132723066470938446 +.

Les 127 décimales de π calculées par Thomas de Lagny en 1719, à partir d'une formule découverte par Euler, $\pi/4$ = arctan (1/2) + arctan (1/3). La 113[e] décimale, marquée par un point, est fausse : elle est en fait égale à 8.

Il évaluait avec exactitude, d'un seul coup d'œil, le nombre de moutons d'un troupeau, ou le nombre de livres dans une bibliothèque, ou la somme des points d'un groupe de 50 dominos. On raconte que Jedediah Buxton, un autre calculateur prodige du XVIIIe siècle, fut invité au théâtre et remercia ses hôtes en leur indiquant le nombre de mots qu'avait prononcé chacun des acteurs. Les calculateurs prodiges gagnaient souvent leur vie en s'exhibant dans des spectacles publics. Dahse connut un destin plus intéressant. Né en 1824 à Hambourg, il reçut une bonne éducation, mais se consacra presque uniquement à perfectionner ses dons particuliers ; c'est ainsi qu'il parvint à multiplier de tête deux nombres de 100 chiffres... en huit heures. Il était capable de s'arrêter dans un calcul, de mémoriser l'état d'avancement de son travail, puis de le reprendre plus tard, par exemple le lendemain matin, après avoir bien dormi.

Dès l'âge de 16 ans, il donnait des spectacles ; c'est ainsi qu'il rencontra Strassnitzky, qui lui proposa d'utiliser ses talents à des fins scientifiques. Outre le calcul de 200 décimales de π, Dahse travailla à la réalisation de tables numériques, essentielles à l'époque en physique et, particulièrement, en astronomie. Il rencontra de nombreux scientifiques, dont le grand mathématicien Carl Friedrich Gauss (1777-1855), grâce auquel il obtint un soutien financier de l'Académie des Sciences de Hambourg. Dahse calcula les logarithmes des 1 000 500 premiers entiers avec une précision de sept décimales. Il commença aussi l'élaboration d'une table des facteurs premiers des nombres entiers jusqu'à 10 000 000, mais mourut en 1861 avant de l'avoir achevée.

En 1824, quelque temps avant le calcul des 200 décimales de π par le calculateur prodige, William Rutherford (à ne pas confondre avec le physicien britannique Ernest Rutherford, inventeur au début du XXe siècle d'un modèle d'atome qui porte aujourd'hui son nom) avait obtenu 208 décimales de π. Malheureusement on découvrit que les deux calculs ne coïncidaient plus à partir du rang 153. En 1847, le calcul de 248 décimales de π par Thomas Clausen (1801-1885) donna raison au tandem Strassnitzky-Dahse.

W. Lehmann calcule 261 décimales en 1853, juste avant que William Rutherford ne sauve l'honneur la même année, en calculant le premier 440 décimales de π (exactes cette fois). Le malheureux est cependant dépassé deux ans plus tard par Richter, qui atteint la 500e décimale, avant d'être lui-même dépassé par William Shanks (1812-1882), qui publie 707 décimales de π en 1874 (il en calcula d'abord 530 en 1853, puis 607 la même année).

Les 707 décimales que Shanks passa 20 années de sa vie à calculer présentaient une singulière déficience en «7». Alors que chacun des autres chiffres était présent à peu près 70 fois dans les 700 premières décimales, le «7» n'apparaissait que 52 fois. On y vit l'indice d'un phénomène remarquable qui devait avoir une explication mathématique

3,
14159 26535 89793 23846
26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172
53594 08128 48473 78139
20386 33830 21574 73996
00825 93125 91294 01832
80651 744

Les fausses décimales de π calculées par William Rutherford furent publiées en 1841 dans la revue de la *Royal Society* de Londres. Rutherford y expliquait en détail les méthodes qu'il avait utilisées pour vérifier ses calculs : «En conclusion, je souhaite indiquer que les calculs ont été faits très soigneusement, et que presque chaque partie du travail a été vérifiée par moi-même ou par un calcul mené par d'autres indépendamment.» Presque chaque partie...

ou autre... La question aurait dû inciter à calculer au plus vite des décimales supplémentaires. Curieusement, ce ne fut pas le cas (sans doute parce que spéculer est plus simple que calculer).

William Shanks au Palais de la découverte

Le record de Shanks résista jusqu'en mai 1945, lorsque D. Ferguson, toujours sans utiliser aucune machine, obtint 539 décimales de π (qui ne furent publiées qu'en 1946). Malheureusement, au-delà du rang 528, elles ne correspondaient plus avec celles de Shanks.

En 1947, Ferguson calcula 710 décimales de π en s'aidant cette fois d'une machine à calculer de bureau. Puis, en association avec John Wrench et en effectuant des contrôles pour détecter d'éventuelles erreurs, il calcula 808 décimales «certifiées» en janvier 1948. Ces calculs confirmèrent de façon irréfutable que les décimales de Shanks, qui s'étaient répandues durant 70 ans dans le monde entier (au point que certains livres récents les mentionnaient encore), étaient fausses à partir de la 528^e.

Ayant étudié de près l'erreur de son prédécesseur, Ferguson a supposé qu'elle proviendrait de l'omission du terme $(1/5)^{145}/145$ dans la série utilisée par Shanks : pendant 20 ans, il aurait oublié ce terme, menant le reste de ses calculs sans erreur.

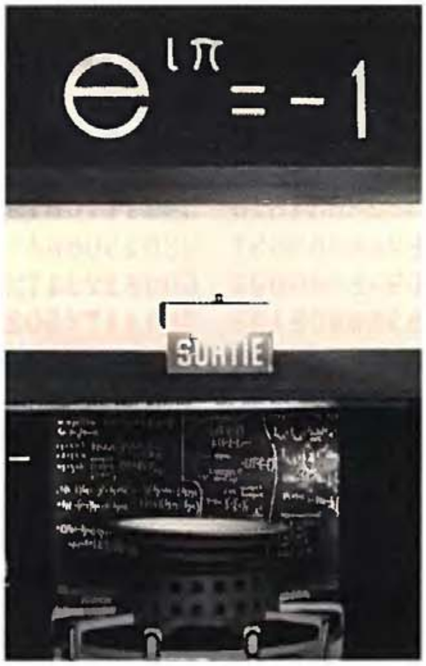
La fréquence anormalement basse des «7» dans les décimales calculées par Shanks, qui avait suscité d'innombrables spéculations, se trouva alors démentie par les nouveaux décomptes.

Au premier abord, cette histoire de manque de «7» conduit à douter que Shanks ait vraiment calculé les 707 décimales : s'il avait simplement commis une erreur, on ne voit pas comment elle aurait conduit à un tel biais. Lassé et fatigué de remplir des colonnes de chiffres, s'est-il amusé à faire une farce à ses contemporains ? En réalité, ce soupçon est infondé, car on constate que le déficit de «7» est présent dans la partie exacte de la suite de Shanks : il n'y a que 37 «7» dans les 527 premières décimales de π. Quand on poursuit la suite des vraies décimales, le déficit initial est bizarrement compensé dans la tranche entre la 528^e et la 700^e, qui comporte 28 «7», alors que la tranche correspondante des fausses décimales de Shanks n'en comporte que 15, ce qui est moins choquant. La distribution des décimales erronées de Shanks dans la tranche de 528 à 700 est plus raisonnable que celle des vraies décimales !

Au total, même s'il reste un léger déficit en «7» dans les véritables 700 premières décimales de π (65 «7» seulement), le déficit n'est pas confirmé quand on s'aventure plus loin. Par conséquent, le (réel) manque de «7» dans les 527 premières décimales doit être considéré comme une fluctuation statistique sans signification.

3,	
1415926535	8979323846
2643383279	5028841971
6939937510	5820974944
5923078164	0628620899
8628034825	3421170679
8214808651	3282306647
0938446095	5058223172
5359408128	4811174502
8410270193	8521105559
6446229489	5493038196
4428810975	6659334461
2847564823	3786783165
2712019091	4564856692
3460348610	4543266482
1339360726	0249141273
7245870066	0631558817
4881520920	9628292540
9171536436	7892590360
0113305305	4882046652
1384146951	9415116094
3305727036	5759591953
0921861173	8193261179
3105118548	0744623799
6274956735	1885752724
8912279381	8301194912
9833673362	4406566430
8602139501	6092448077
2309436285	5309662027
5569397986	9502224749
9620607497	0304123668
8619951100	8920238377
0213141694	1190298858
2544681639	7999046597
0008170029	6312377381
3420841307	9145118398
0570985	

Les fausses décimales de William Shanks ont été utilisées pendant plus de 70 ans, et certains livres récents les reproduisent encore. Pour perpétuer cette tradition, j'ai recopié les 707 décimales publiées par Shanks en 1874, que j'ai trouvées dans un livre paru en 1962.



La formule d'Euler à l'entrée de la salle π du Palais de la Découverte, à Paris.

L'agacement dû à 70 ans de spéculations infondées provoqua des réactions un peu amères : «Si les cyclomètres et les apocalyptiques avaient uni leurs efforts jusqu'à s'accorder sur un verdict unanime concernant le phénomène, ils auraient bien mérité de leur race», écrivait ainsi un commentateur.

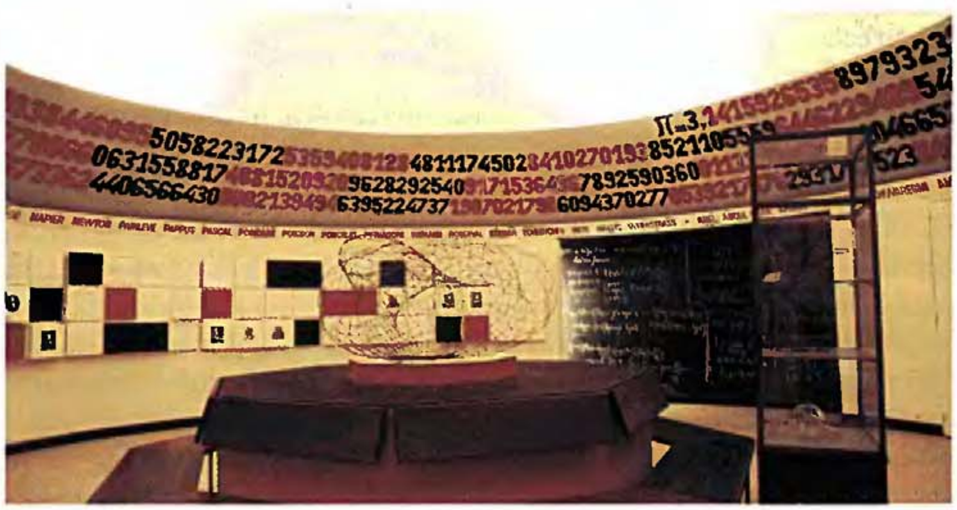
Cette erreur de Shanks est à l'origine d'une malédiction dont pâtit encore aujourd'hui le Palais de la Découverte (le musée des sciences du centre de Paris, situé avenue Franklin Roosevelt). Lors de son aménagement en 1937, à l'occasion de l'exposition internationale de Paris, on utilisa les décimales de π proposées par Shanks pour décorer la salle 31, aussi appelée «salle π» (remarquez le numéro, sans doute choisi délibérément). Ces décimales sont disposées en une grande spirale couvrant une partie du plafond. La salle est bien sûr ronde, et son entrée est ornée de la formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$.

Les responsables du Palais de la Découverte corrigèrent l'erreur en 1949. Ce sont donc les bonnes décimales que l'on peut admirer aujourd'hui, et dont s'enivrent les bataillons de potaches (j'en fus un) qui passent émerveillés dans cette salle unique au monde, aménagée en l'honneur de π.

Malgré cette correction, nombreux sont les livres qui, quarante ans après, précisent encore avec candeur que les décimales de la salle π sont fausses à partir de la 528^{e}. Le *Quid* de 1997, par exemple, colporte cet affreux et injuste ragot !

Le *Quid* commet d'ailleurs d'autres erreurs dans les quelques lignes qu'il consacre à π. Il orthographie mal le nom de Chudnovsky, dont nous parlerons au prochain chapitre, et, plus grave, il prétend que le papyrus de Rhind utilise la valeur $\pi = 32/9$, alors que c'est $(16/9)^2$.

Si vous visitez le Palais de la Découverte, vous vous amuserez à repérer l'emplacement de l'erreur en regardant au-dessus des noms de Poincaré et Poisson. Avant la correction, on y lisait «...021395016...»,



La salle π du Palais de la Découverte en 1947, avant la correction des fausses décimales *(ci-dessus)*, et après correction *(ci-contre)*. Dans l'ancienne salle, les fausses décimales commencent au premier bloc blanc.

qui est devenu «...021394946...». J'ai attentivement scruté la jonction entre la partie qui a toujours été correcte et celle qui a été corrigée, mais je n'ai décelé aucune trace particulière, et j'en ai conclu que, lors de la correction, les chiffres de π ont été entièrement repeints.

Pour ses derniers calculs, Ferguson avait utilisé un calculateur de bureau. Il s'agissait sans doute d'une machine à additionner, permettant de faire des multiplications par additions répétées et décalages, car, à cette époque, aucune machine de bureau ne faisait la multiplication directe : ce n'étaient que des additionneurs, proches par leur principe de fonctionnement de la machine construite par Leibniz en 1694, mais rendus robustes par l'expérience des fabricants. Les machines à calculer, qui étaient en train de devenir électroniques et seraient bientôt nommées ordinateurs, ne lâcheront plus jamais π.

Tout est-il si facile avec les machines ?

Forte est la tentation de croire que les difficultés disparaissent dès que ce sont les machines qui calculent, et que tout alors n'est plus qu'une question de temps et d'argent. C'est clairement cette conception qui conduit l'historien de π Petr Beckmann à écrire :

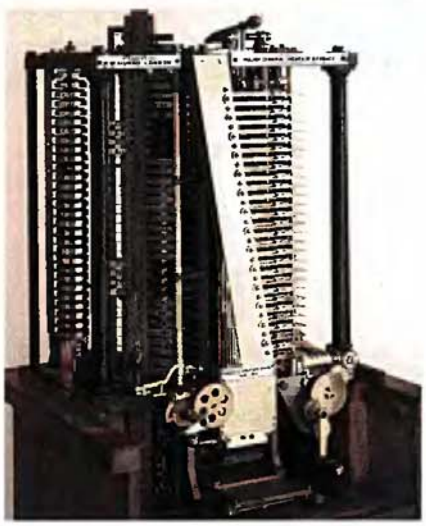
«Le nombre de décimales que, depuis Archimède, on peut obtenir, n'est lié qu'à la capacité de calcul et à la persévérance. Il y a quelques années, c'était seulement une question de programmation des ordinateurs et aujourd'hui ça n'est en principe plus rien que l'affaire des dollars qu'on accepte de dépenser pour acheter du temps de calcul.»

Cette conception me paraît totalement fausse : ce sont les progrès mathématiques qui ont permis d'arriver aux centaines de décimales ; sans les formules d'arcs tangentes, il est probable que l'on n'aurait jamais été aussi loin à la main. De même, nous ne serions pas arrivés aujourd'hui aux milliards de décimales sans de nouveaux progrès mathématiques. Enfin, sans la découverte de Simon Plouffe *(voir les chapitres 7 et 8)*, une centaine d'années ne nous auraient sans doute pas suffi pour accéder au 1 000 milliardième digit (chiffre binaire) de π, que nous savons égal à 1 sans avoir calculé les digits précédents. Ceux qui méprisent les machines et leurs utilisateurs ignorent que la programmation n'est pas un travail facile ! Tous les jours, les informaticiens en font l'expérience, et c'est pour cette raison que l'informatique et les mathématiques sont mêlées de plus en plus intimement.

Une certaine méconnaissance des problèmes liés aux grands nombres est aussi la source de la croyance qu'avec des machines, on peut tout faire facilement. Il faut comprendre que même en doublant fréquemment les capacités des machines (ce qui demande toujours un effort et ne pourra pas durer indéfiniment), plusieurs générations

MULTIPLES OF π

00001	03141592653589783238462643383
00002	06283185307179566476925286766
00003	09424777960769349715387930149
00004	12566370614359132953850573532
00005	15707963267948916192313216915
00006	18849555921538699430775860298
00007	21991149575128482669238503681
00008	25133741228718765907701147064
00009	28275333882308049146163790447
00010	314159265358978364626433830
00011	34557518189487615623089077213
00012	37699111843077398861551720596
00013	40840704496667182100014363979
00014	43982297150256965338477007362
00015	47123889803846748576939650745
00016	50265482457436531815402294128
00017	53407075111026315053864937511
00018	56548667764616098292327580894
00019	59690260418205881530790224277
00020	62831853071795664769252867660
00021	65973445725385448007715511043
00022	69115038378975231246178154426
00023	72256631032565014484640797809



Les multiples de π, calculés et imprimés par la machine analytique de Charles Babbage (1791-1871). Cette première machine méritant le nom d'ordinateur (en raison de sa conception qui permet une sorte de programmation) n'a pas vraiment calculé π, mais fut chargée d'en évaluer les multiples à partir d'une valeur donnée de π. Babbage conçut sa machine vers 1850, mais ne la vit jamais construite : cette table fut en fait calculée en 1906 par une version partielle de la machine, mise au point par son fils. Notez qu'elle est entièrement fausse à cause d'une erreur dans la donnée initiale de π (la 14e décimale est fausse).

seraient insuffisantes pour dépasser la «proche banlieue» des grands nombres. Un calcul élémentaire conduit à l'observation suivante, que chacun devrait méditer :

En doublant les capacités de calcul des machines tous les ans (ce qui est plus que ce que nous arrivons à faire), il faudrait plus de trois millénaires pour multiplier une puissance de calcul par $10^{1\,000}$.

Nous devons donc apprendre à distinguer entre les grands nombres : il y a ceux à notre portée (10^{10}, par exemple) et ceux qui ne le seront vraisemblablement jamais, tel $10^{1\,000}$.

Au cours des 40 dernières années, les leçons que nous avons tirées de la confrontation avec le problème de la programmation ont changé notre façon de concevoir la complexité : celle-ci ne surgit pas uniquement *à l'infini*, mais aussi *dans le fini*, avec les grands nombres, par exemple. Et cette complexité là, on n'en acquiert jamais la maîtrise.

Avec une machine, c'est quand même moins bête

Après le calcul certifié de 808 décimales de π, réalisé en 1947 à l'aide d'une machine de bureau par Ferguson et Wrench et publié en 1948, un autre calcul avec machine de bureau, mené l'année suivante, en juin, par Wrench et Levy Smith, donne 1 120 décimales.

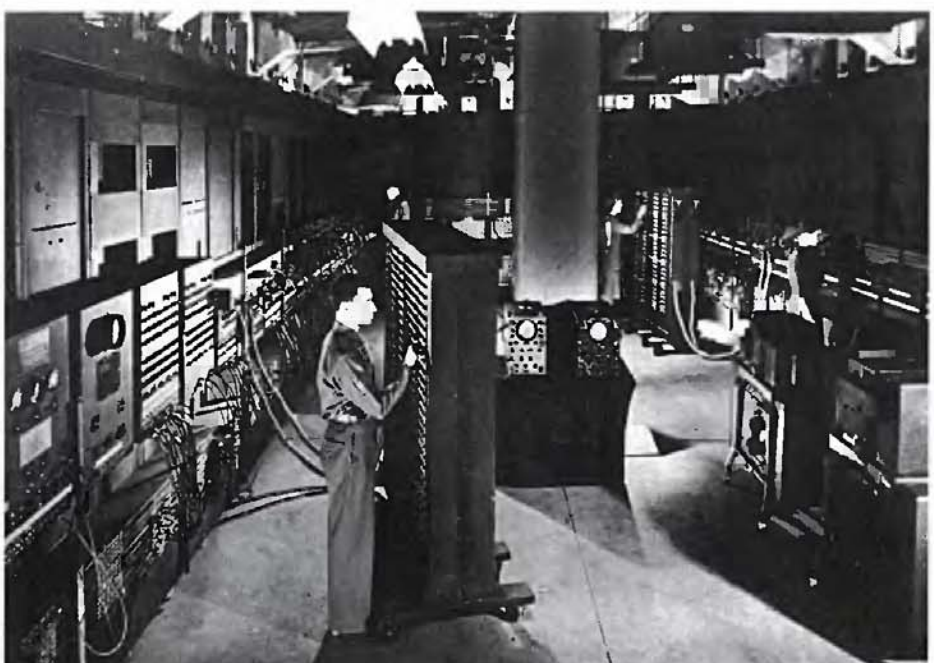
Leur succès est de courte durée : avant que ce calcul ne soit vérifié, le premier ordinateur électronique, baptisé ENIAC *(Electronic Numerical Integrator and Computer)*, calcule 2 037 décimales de π en septembre 1949. Cette machine, mise au point pour le Laboratoire de recherche balistique (le BRL) de la Moore School de Philadelphie et opérationnelle depuis novembre 1945, est programmée par George Reitwiesner. Dès lors, l'ordinateur régnera sans contestation possible dans la course aux décimales de π.

Le calcul de l'ENIAC a duré 70 heures, et aucune panne ne l'a interrompu : c'est un petit miracle, étant donné que la machine pèse 30 tonnes, occupe une surface de 72 mètres carrés au sol et, surtout, comporte 18 000 lampes ayant chacune une durée de vie assez limitée. Deux gros moteurs *Chrysler* de 12 chevaux sont d'ailleurs nécessaires pour faire fonctionner le système de ventilation qui évite l'échauffement des lampes. On a affecté à ce calculateur, mis au point en secret pendant la guerre, le budget très important de 150 000 dollars, car il est destiné à calculer des tables de tir que doit fournir le BRL et qu'il ne parvient plus à élaborer assez rapidement. Cependant l'ENIAC est achevé trop tardivement pour participer à cet effort de guerre. Il fait malgré tout ses premiers calculs sur des problèmes militaires liés aux bombes à hydrogène (après que celles d'Hiroshima et Nagasaki ont explosé ; il n'y est donc pour rien !).

L'existence de cet ordinateur, qui fonctionnait en notation décimale, n'est révélée au public qu'en février 1946. Il est alors l'objet d'une publicité tapageuse : qualifié de «cerveau électronique», l'ENIAC est présenté comme une merveille d'intelligence, alors qu'il n'est même pas l'équivalent d'une calculette programmable actuelle. Le calcul de 2 037 décimales de π faisait sans doute partie de cette tactique de propagande destinée à promouvoir l'énorme bête.

En 1949, le mathématicien et physicien John von Neumann se montre très intéressé par les décimales calculées par l'ENIAC. Il en fait d'ailleurs une étude statistique, qui donne lieu à un rapport de recherche cosigné avec N. Metropolis et G. Reitwiesner. La conclusion, quelque peu décevante, de ce rapport est que les décimales de π ne se distinguent en rien des suites aléatoires de chiffres que l'on obtiendrait par un tirage au sort équitable. De tels résultats seront la conclusion invariable des multiples études auxquelles donneront lieu les records successifs du calcul de π *(nous reviendrons sur cette question au chapitre 10).*

Après l'ENIAC, les records se suivent avec régularité et conduisent en 1973 au million de décimales calculées. Pendant cette période, enivrés peut-être par les progrès des machines qui incitent à une certaine paresse, ou trop préoccupés par le codage méticuleux des calculs dans les langages de programmation malcommodes de l'époque, les mathématiciens et les informaticiens n'innovent guère. Ce sont toujours les méthodes avec arcs tangentes et séries de Gregory qui sont utilisées.



L'ENIAC, premier ordinateur électronique, fut d'abord construit pour calculer des tables de tir pour l'armée américaine ; il fut opérationnel en novembre 1945. La fascination pour π est si universellement partagée que l'une des premières tâches civiles confiées à l'ENIAC en 1949 est de battre le record de calcul des décimales de π. Mission accomplie avec 2 037 décimales, soit presque le double du record précédent, obtenu la même année à l'aide d'une machine à calculer mécanique.

Tous les calculs effectués à cette époque reposent sur des algorithmes *quadratiques en temps* et *linéaires en mémoire* : pour doubler le nombre de décimales, il faut multiplier au moins par quatre le temps de calcul et disposer d'une mémoire deux fois plus grande ; pour avoir dix fois plus de chiffres, il faut calculer 100 fois plus longtemps et utiliser dix fois plus de mémoire.

En 1954, aux États-Unis, l'ordinateur baptisé NORC *(Naval Ordnance Research Calculator),* programmé par S. Nicholson et J. Jeenel, fournit 3 092 décimales de π au bout de 13 minutes de calcul seulement.

À Paris, en janvier 1958, un ordinateur IBM 704, programmé par François Genuys, calcule 10 000 décimales de π en 100 minutes. Le même programme est utilisé au Commissariat à l'énergie atomique pour atteindre 16 167 décimales de π le 20 juin 1959.

À Londres, en mai de la même année, G. Felton, utilisant un ordinateur *Pegasus* au Centre informatique *Ferranti*, obtient lui aussi les 10 000 premières décimales de π, quoique plus laborieusement, après 33 heures de calcul (l'année précédente, il avait déjà calculé et publié 10 021 décimales de π, mais elles étaient fausses à partir de la 7 481^{e} décimale).

Le 29 juin 1961, à Washington, Daniel Shanks (sans lien avec le William Shanks qui calcula pendant 20 ans pour rien) et John Wrench (qui avait aidé Ferguson à vérifier ses calculs en 1948 et qui, entretemps, avait échangé sa machine de bureau contre un ordinateur) atteignent 100 000 décimales de π avec un ordinateur IBM 7090, au bout d'un calcul de 8 heures et 43 minutes.

Voici quelques détails sur la performance de Shanks et Wrench : leur ordinateur calculait en binaire (contrairement à l'ENIAC) ; ils ont utilisé la formule *(10)* de la page 89, qui nécessite trois sous-calculs (un pour chaque terme) ayant duré respectivement 3 heures 7 minutes, 2 heures 20 minutes et 2 heures 34 minutes. Dans le calcul des développements d'arcs tangentes, ils ont regroupé les termes deux par deux, ce qui donne une nouvelle série et permet une économie de calcul de 27 pour cent par rapport à la formule usuelle. Regrouper trois termes leur aurait fait gagner encore plus de temps, mais leur machine ne disposait pas de mots mémoire assez longs. Deux heures de calcul ont aussi été économisées par l'utilisation judicieuse de simples décalages à la place de certaines multiplications. Toute cette partie du calcul a été effectuée en base 2, ainsi que la vérification, faite en utilisant la formule *(9)* de la page 89. Les deux valeurs binaires ainsi calculées ont été comparées en moins de 0,16 seconde. Après détection et correction d'une erreur, la machine a abordé la dernière étape, la conversion en base 10, qui a demandé 42 minutes.

Que faire avec le million de Jean Guilloud et Martine Bouyer ?

En février 1966, à Paris, Jean Guilloud et J. Filliatre obtiennent 250 000 décimales de π sur une machine IBM 7030. Ce record est amélioré en février 1967 sur une machine CDC 6600, toujours à Paris : cette fois-ci, Jean Guilloud et M. Dichampt obtiennent 500 000 décimales.

Quelques années plus tard, en 1973, le même Jean Guilloud, associé cette fois à Martine Bouyer, obtient un million de décimales en utilisant le même couple de formules que Shanks et Wrench, programmées sur des machines CDC 7600. Le premier calcul a été fait dans les locaux de la société Franlab, à Rueil-Malmaison, le week-end du 18, 19 et 20 mai 1973. Il a duré presque une journée (22 heures et 11 minutes pour le calcul en binaire, puis 1 heure et 7 minutes pour la conversion du résultat binaire en notation décimale). La vérification a ensuite été faite au CERN, à Genève, les 25 et 26 août et les 2 et 3 septembre 1973, occupant la machine pendant 13 heures et 40 minutes. Leur résultat publié, accompagné d'une étude statistique, constitue un volume de 415 pages ; l'un de ses propriétaires m'a dit qu'il avait le défaut étonnant de s'effacer quand on passait le doigt sur les pages, ce qui n'est pas le cas de l'exemplaire que m'a aimablement offert Jean Guilloud.

L'étude de ce million de décimales a été menée méticuleusement, selon les principes déjà utilisés pour vérifier que la table des nombres aléatoires publiée à l'époque par la Rand Corporation n'était pas biaisée. Cette étude ne dévoile rien de particulier : les décimales de π, même quand on en dispose d'un grand nombre, s'obstinent à rester quelconques. Malheureusement de tels tests ne constituent pas une preuve que π est aléatoire, et la prudence s'impose : on s'abstiendra donc de considérer la suite des décimales de π comme aléatoire et de l'utiliser dans des algorithmes devant fonctionner avec des suites aléatoires. Pour les chercheurs chargés de l'étude des données, les résultats tirés du million de décimales de π constituent le pire des cas de figure : ils ne montrent rien d'intéressant, et ne donnent aucun indice nouveau pour démontrer mathématiquement qu'il n'y a rien d'intéressant (ce qui, en revanche, serait intéressant !).

Remarquons que les biologistes, avec les séquences génétiques qui sont aussi de longues suites de symboles, sont dans une situation moins cruelle : les séquences d'ADN présentent en effet des biais statistiques de toutes sortes, et ce ne sont pas les mêmes d'une espèce à l'autre. On y trouve aussi des mots plus fréquents, des morceaux répétés ou presque répétés, des structures claires, etc. En résumé, à l'opposé de ce qui se passe pour π, on trouve dans les données biologiques du génome de quoi occuper des armées de scientifiques pendant des siècles, ce qui n'empêche pas le déchiffrement total du génome d'être difficile.

TABLE DES DECIMALES DE PI 400

19951	41908	16682	24900	74207	11186	48815	47728	91718	65359	67765
19952	39579	93350	33427	28214	60541	69649	60098	47069	79585	59264
19953	30428	70363	66471	30713	14782	33061	15764	19913	22242	06460
19954	99898	83076	26858	36055	52740	99047	84676	10760	42417	84215
19955	06285	17557	35299	96478	62552	95428	36742	98706	64579	43375
19956	80101	40740	21161	86144	84329	76574	42634	28528	70477	85563
19957	08309	63143	52787	83041	94501	97029	46575	77773	28167	46858
19958	08745	39316	03937	25331	58992	80579	43463	14087	35860	86177
19959	88263	34927	74615	11849	11655	13068	18467	13677	34882	33410
19960	85136	40394	79392	08876	88633	63394	61382	35834	47940	81569
19961	61091	42938	77347	13893	42377	36191	09646	05642	44474	77908
19962	20760	49660	27135	61689	54106	44483	21365	98082	93890	97296
19963	18912	11834	29149	06163	89638	61069	37520	89534	68839	83344
19964	46718	98212	43478	07238	74074	57697	55450	74368	46747	13502
19965	48588	18399	66556	81963	44528	81194	18331	72636	82505	06118
19966	64900	39412	55205	74571	20360	35578	02514	19043	52671	83721
19967	92138	48299	05803	22469	58424	32315	89844	32510	39654	43535
19968	05354	32292	16747	04077	86146	84859	76255	74461	53511	88003
19969	14305	69954	92784	71674	54497	26976	12839	33251	83819	72223
19970	28360	70752	27812	92813	01065	69412	62948	73063	42688	37338
19971	18174	21706	08647	54827	63942	42391	40275	32180	42951	90341
19972	16351	70469	80742	33515	56057	85756	24509	99253	20178	74996
19973	36640	47347	70389	85587	30650	76038	70997	73184	31281	09897
19974	89882	08543	55955	09432	53902	37189	52168	20233	44245	57257
19975	53078	79263	39855	09016	45594	23733	96625	22335	16487	50589
19976	55694	21729	72448	95998	82508	92321	12034	79589	41546	54603
19977	03787	86175	91571	66139	88693	26873	74968	47305	49653	29378
19978	21475	64810	57938	08285	30053	24470	80506	56929	42234	00109
19979	59348	29461	45390	78890	66162	64021	50130	73533	00331	92074
19980	56372	63770	77099	93999	22886	21224	32488	02062	63485	08885
19981	30360	10723	43689	01360	64275	81425	28398	78594	91799	79611
19982	21963	79757	65192	45218	67096	08809	21371	11977	50008	78159
19983	30430	72934	48839	30957	57415	92413	75285	97779	72918	93453
19984	85050	80383	19867	74590	02518	65791	72370	80857	41642	97153
19985	80788	40607	13068	68036	19824	19715	77476	38950	72534	68404
19986	56919	27595	31937	22370	22290	15580	06560	76047	38547	35990
19987	44779	96748	74996	97694	27137	66869	55331	95125	33776	40985
19988	87096	68386	32639	26164	94560	86841	40374	56842	07194	05950
19989	70174	30354	69182	15090	04664	93998	55174	13893	85197	57312
19990	15682	61622	86223	18810	96729	74760	60130	28331	19371	61140
19991	87472	70676	25585	67775	11995	66674	86151	96491	29701	93318
19992	08499	41096	18139	29649	27893	60902	12535	44332	73750	64260
19993	62429	94120	32736	25582	44174	98345	09473	09453	43661	59072
19994	84163	19368	30757	19798	06823	15357	37155	57181	61221	56787
19995	93642	50138	87117	02327	55557	79302	26678	58031	99930	81083
19996	05763	07652	33205	07400	13939	09580	79016	37717	62925	92837
19997	64874	79017	72741	25678	19055	55621	80504	87674	69911	40839
19998	97791	93765	42320	62337	47173	24703	36976	33579	25891	51526
19999	03156	14033	32127	28491	94418	43715	06965	52087	54245	05989
20000	56787	96130	33116	46283	99634	64604	22090	10610	57794	58151

Dernière page du livre *1 000 000 de décimales de π*, de Jean Guilloud et Martine Bouyer, parfois qualifié de «livre le plus ennuyeux du monde». Les 2 500 décimales de cette page vont de la 997 501^e à la 1 000 000^e.

Annexe 1 : histoire des formules de π avec arctan

(1) $\pi = 16 \arctan 1/5 - 4 \arctan 1/239$

Trouvée par John Machin ; il l'utilisa pour calculer 100 décimales en 1706. William Rutherford l'utilisa aussi en 1852. William Shanks l'utilisa pour tous ses calculs. Elle servit aussi à programmer l'ENIAC en 1948.

(2) $\pi = 20 \arctan 1/7 + 8 \arctan 3/79$

Trouvée par Leonhard Euler en 1755. Utilisée par G. Vega en 1794.

(3) $\pi = 16 \arctan 1/5 - 4 \arctan 1/70 + 4 \arctan 1/99$

Trouvée par Euler en 1764. Utilisée par Rutherford en 1841 pour calculer 208 décimales (dont 152 correctes).

(4) $\pi = 4 \arctan 1/2 + 4 \arctan 1/5 + 4 \arctan 1/8$

Trouvée par L. von Strassnitzky et utilisée par le calculateur prodige Zacharias Dahse en 1844 pour arriver à 200 décimales.

(5) $\pi = 4 \arctan 1/2 + 4 \arctan 1/3$

Trouvée par Charles Hutton en 1776. Utilisée par W. Lehmann en 1853 pour calculer 261 décimales.

(6) $\pi = 8 \arctan 1/3 + 4 \arctan 1/7$

Trouvée par Hutton en 1776 et indépendamment par Euler en 1779. Utilisée par Vega en 1789 pour calculer 143 décimales (dont 126 exactes), puis par Thomas Clausen en 1847 et Lehmann en 1853 (qui confirmait son calcul fait avec la formule précédente).

(7) $\pi = 12 \arctan 1/4 + 4 \arctan 1/20 + 4 \arctan 1/1985$

Trouvée par S. Loney en 1893, et par Carl Störmer en 1896. Utilisée par D. Fergusson en 1945.

(8) $\pi = 32 \arctan 1/10 - 4 \arctan 1/239 - 16 \arctan 1/515$

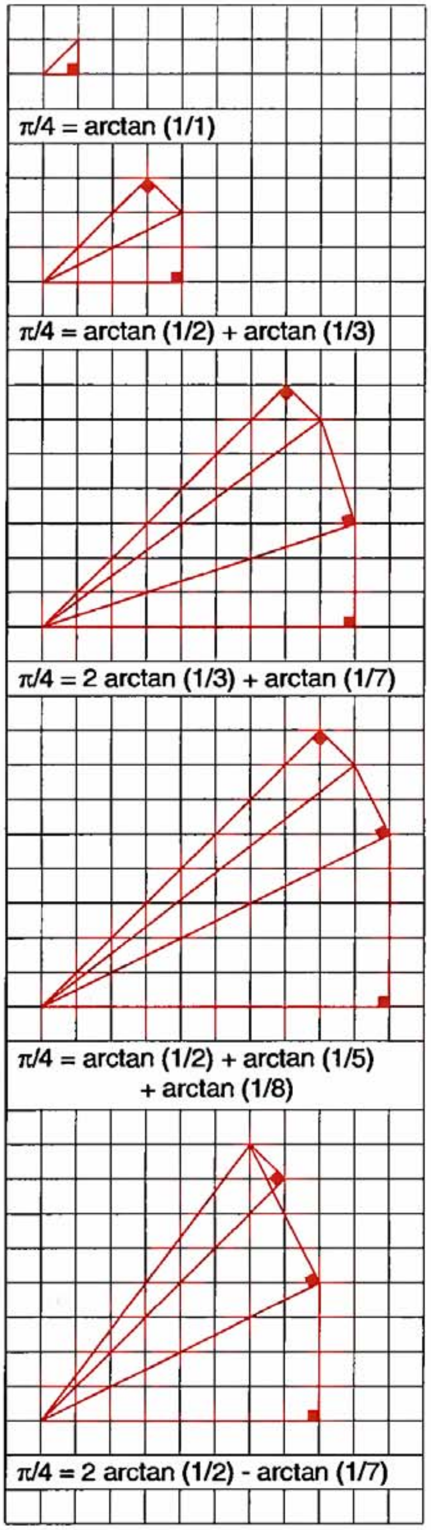
Trouvée par S. Klingenstierna en 1730. Utilisée par G. Felton en 1957 pour calculer 10 021 décimales (dont seules 7 480 étaient exactes).

(9) $\pi = 48 \arctan 1/18 + 32 \arctan 1/57 - 20 \arctan 1/239$

Trouvée par Carl Friedrich Gauss en 1863. Utilisée par Felton en 1958 pour calculer 10 021 décimales (exactes cette fois). Utilisée par D. Shanks et J. Wrench en 1961, et par J. Guilloud et M. Bouyer en 1973.

(10) $\pi = 24 \arctan 1/8 + 8 \arctan 1/57 + 4 \arctan 1/239$

Trouvée par Störmer en 1896. Utilisée par Shanks et Wrench en 1961, et par Guilloud et Bouyer en 1973.



Grâce à cette méthode graphique, on visualise directement les démonstrations des formules les plus simples exprimant π par des arcs tangentes.

Annexe 2 : démonstration des formules d'arctan

Pour démontrer les formules de décomposition de $\pi/4$ en somme d'arcs tangentes, la méthode la plus simple consiste à utiliser plusieurs fois de suite la relation :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Établissons par exemple la formule suivante, qui était déjà connue d'Euler :

$$\arctan\frac{1}{n} = \arctan\frac{1}{n+p} + \arctan\frac{p}{n^2+np+1}$$

Pour cela, on calcule :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{n+p} + \arctan\frac{p}{n^2+np+1}\right) = \frac{\dfrac{1}{n+p}+\dfrac{p}{n^2+np+1}}{1-\dfrac{1}{n+p}\times\dfrac{p}{n^2+np+1}}$$

$$= \frac{n^2+np+1+np+p^2}{n^3+n^2p+n+n^2p+np^2+p-p} = \frac{1}{n}$$

De même, on démontre facilement que : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}$

En cherchant systématiquement des formules de la forme :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{n_1} + \arctan\frac{1}{n_2} + \cdots + \arctan\frac{1}{n_p}$$

Jean-Claude Herz a trouvé les solutions suivantes :

pour $p = 2$	$n_1 = 2$	$n_2 = 3$		
pour $p = 3$	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 13$	
	$n_1 = 2$	$n_2 = 5$	$n_3 = 8$	
	$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 7$	
pour $p = 4$	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 14$	$n_4 = 183$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 15$	$n_4 = 98$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 18$	$n_4 = 47$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 4$	$n_3 = 23$	$n_4 = 30$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 5$	$n_3 = 9$	$n_4 = 73$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 5$	$n_3 = 13$	$n_4 = 21$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 6$	$n_3 = 7$	$n_4 = 68$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 6$	$n_3 = 8$	$n_4 = 31$
	$n_1 = 2$	$n_2 = 7$	$n_3 = 8$	$n_4 = 18$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 8$	$n_4 = 57$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 9$	$n_4 = 32$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 12$	$n_4 = 17$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 4$	$n_3 = 5$	$n_4 = 47$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 4$	$n_3 = 7$	$n_4 = 13$
	$n_1 = 3$	$n_2 = 5$	$n_3 = 7$	$n_4 = 8$

Pour chaque valeur de p, il n'y a qu'un nombre fini de formules. On calcule facilement par récurrence la première formule de chaque liste, ce qui donne une suite infinie de telles expressions : cette suite est engendrée en partant de la première formule, $\pi/4 = \arctan(1/1)$, et en appliquant à chaque fois au dernier terme la relation $\arctan(1/n) = \arctan[1/(n+1)] + \arctan[1/(n^2+n+1)]$ démontrée précédemment. Les formules ainsi obtenues correspondent aux coefficients suivants :

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	...
1						
2	3					
2	4	13				
2	4	14	183			
2	4	14	184	33 673		
2	4	14	184	33 674	1 133 904 603	
...						

Les nombres d_n de la diagonale sont définis par : $d_1 = 1$ et $d_{n+1} = d_n^2 + d_n + 1$.

Signalons un résultat important qui permet des recherches systématiques de formules d'arcs tangentes, et la vérification facile de toutes celles indiquées :

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ des entiers. La somme $\arctan(b_1/a_1) + \arctan(b_2/a_2) + ... + \arctan(b_n/a_n)$ est de la forme $k\pi$, où k est un nombre entier, si et seulement si le nombre complexe $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) ... (a_n + ib_n)$ a une partie imaginaire nulle.

Voici un autre résultat du même type : si u, v et k sont des entiers, alors $m \arctan(1/u) + n \arctan(1/v) = k\pi/4$ si et seulement si $(1-i)^k(u+i)^m(v+i)^n$ a une partie imaginaire nulle.

Annexe 3 : les formules avec arctan les plus efficaces

Une étude systématique des formules d'arcs tangentes et de leur efficacité conduit aux résultats suivants, trouvés à l'adresse *Internet* : http://www.ccsf.caltech.edu/~roy/pi.formulas.html (roy@cacr.caltech.edu).

La meilleure des formules est $\pi/4 = 44 \arctan 1/57 + 7 \arctan 1/239 - 12 \arctan 1/682 + 24 \arctan 1/12943$, qui a un «coût de calcul» de 85,67 pour cent par rapport à celle de John Machin (elle permet donc un gain asymptotique de 14,33 pour cent).

On mesure le coût de calcul d'une telle formule par la quantité $1/\log(57) + 1/\log(239) + 1/\log(682) + 1/\log(12943)$, qui est le nombre de termes qu'il faut calculer pour avoir un chiffre de plus.

En utilisant des conventions simples, nous notons une telle formule 44•57 + 7•239 – 12•682 + 24•12943.

Les 15 formules les plus efficaces sont :

44•57 + 7•239 – 12•682 + 24•12943	85,67 %
22•28 + 2•443 – 5•1393 – 10•11018	88,28 %
17•23 + 8•182 + 10•5118 + 5•6072	92,41 %
88•172 + 51•239 + 32•682 + 44•5357 + 68•12943	93,56 %
100•73 + 54•239 – 12•2072 – 52•2943 – 24•16432	96,38 %
12•18 + 8•57 – 5•239	96,51 %
8•10 – 1•239 – 4•515	96,65 %
44•53 – 20•443 – 5•1393 + 22•4443 – 10•11018	97,09 %
17•22 + 3•172 – 2•682 – 7•5357	97,95 %
16•20 – 1•239 – 4•515 – 8•4030	99,13 %
61•38 – 14•557 – 3•1068 – 17•3458 – 34•27493	99,14 %
227•255 – 100•682 + 44•2072 + 51•2943 – 27•12943 + 88•16432	99,32 %
24•53 + 20•57 – 5•239 + 12•4443	99,61 %
127•241 + 100•437 + 44•2072 + 24•2943 – 12•16432 + 27•28800	99,92 %
4•5 – 1•239	100,00 %

Il est possible que la prise en compte de la base dans laquelle on effectue les calculs, et les simplifications qui pourraient en résulter, changent le classement. Toutefois il semble impossible de tenir compte de toutes les spécificités d'un calcul de manière à proposer un classement absolu des formules.

6

Le calcul pratique de π

L'exemple des algorithmes compte-gouttes

Découvrons les principes généraux utilisés pour calculer, à la main ou avec une machine, des nombres avec une longue suite de décimales. Nous donnons l'exemple d'un programme à la fois court (158 caractères) et astucieux qui calcule π avec 2 400 décimales, et nous en expliquons le fonctionnement. En le transposant, on obtient une méthode de calcul de π à la main qui permet d'obtenir plus de décimales de π que Ludolff von Ceulen (35) ou que Johann Dahse (200) en quelques heures ou... quelques jours. Le chapitre se termine par de brèves remarques sur les techniques d'accélération de la convergence.

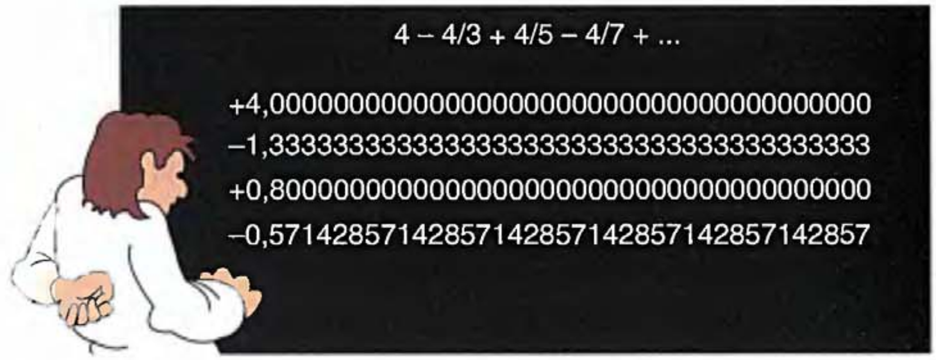
Principes généraux de la pratique du calcul de π

Pour calculer π avec un grand nombre de décimales en utilisant une formule de série, les principes de base sont les mêmes, que l'on procède à la main ou avec une machine. Il faut d'emblée calculer avec beaucoup de chiffres. Si vous voulez 1 000 décimales, et si votre série comporte comme premier terme 1/3, vous commencerez sans doute par écrire sur une feuille de papier ou dans un tableau de mémoires de l'ordinateur : 0,3333333...33 (avec 1 000 fois le «3»).

Pour effectuer les opérations élémentaires d'addition, de multiplication et de division (ou d'extraction de racine carrée, voir l'annexe), on procède comme on l'a appris à l'école, en prenant une feuille de papier et en fractionnant éventuellement le travail, si l'on calcule à la main, ou en programmant le procédé de l'école si l'on utilise un ordinateur.

Les opérations de l'ordinateur sont prévues pour être menées avec des nombres de quelques chiffres (10 par exemple). On ne peut pas les utiliser telles quelles avec les grands nombres : il faut donc programmer les opérations élémentaires en les ramenant à des opérations entre nombres courts. Pour exploiter au mieux les opérations arithmétiques disponibles, il est souvent intéressant de travailler dans une base supérieure à 10, car cela réduit le nombre de «chiffres» à traiter ; une bonne

Pour calculer un grand nombre de décimales de π, par exemple avec la série de Madhava-Gregory-Leibniz, il faut calculer dès le départ avec un grand nombre de décimales.



idée est de travailler en base 100 (ou 1 000, etc.) car, à la fin du calcul, aucune conversion n'est nécessaire : par exemple, si un nombre en base 1 000 s'écrit comme la suite des trois «chiffres» 324, 746 et 783, son écriture en base 10 est la suite des neuf chiffres 3, 2, 4, 7, 4, 6, 7, 8, 3.

Le choix de la base de calcul b est aussi fait de manière à tirer le meilleur parti de l'arithmétique offerte par le langage de programmation, où les calculs sont par exemple limités aux entiers inférieurs à 32 768 = 2^{16}. Pour multiplier des entiers en base b, il faut connaître la table de multiplication entre entiers $\leq b$ (c'est pour cela que nous apprenons la table de multiplication des chiffres décimaux). Comme les résultats d'une telle table varient entre 0 et b^2, il faut choisir b de telle façon que tous les résultats de la table soient correctement calculés, donc inférieurs à 32 768 (dans notre exemple). Cette contrainte, ajoutée à celle du paragraphe précédent, conduit fréquemment à choisir pour base b la plus petite puissance de 10 dont le carré est inférieur à l'entier maximum du langage. Dans notre exemple, celui-ci est égal à 32 768, d'où $b = 100$.

Au chapitre suivant, nous verrons que la programmation de la multiplication par la méthode usuelle apprise à l'école n'est pas la plus efficace. Pour arriver au million de décimales, les programmeurs se sont contentés d'utiliser la méthode usuelle, mais pour aller plus loin, ils ont dû utiliser les méthodes plus perfectionnées.

Toutes sortes d'astuces pour écourter les calculs, éviter de faire deux fois la même opération et contrôler les résultats intermédiaires et finaux, sont possibles et sont effectivement mises en œuvre par les calculateurs de π.

Programmes mystérieux

Pour programmer une méthode utilisant des arcs tangentes, ce qui conduit à multiplier des grands nombres, une redéfinition de l'arithmétique est nécessaire. Ces nouvelles instructions allongent les programmes, mais certaines astuces permettent d'en limiter la taille totale. Le record en la matière est sans doute le programme suivant en langage C, qui calcule 2 400 décimales de π. Son auteur, inconnu, a réalisé un véritable exploit en n'utilisant que 158 caractères.

Obtenir 2 400 décimales de π
avec un programme de 158 caractères en langage C :

```
int a=10000,b,c=8400,d,e,f[8401],g;main(){for(;b-c;)
f[b++]=a/5;for(;d=0,g=c*2;c-=14,printf("%.4d",e+d/a),
e=d%a)for(b=c;d+=f[b]*a,f[b]=d%--g,d/=g--,--b;d*=b);}
```

Le même programme traduit en Basic :

```
DEFLNG a-g : DIM f (8401) AS LONG
  a = 10000 : c = 8400
  WHILE (b <> c)
        f(b) = a \ 5 : b = b + 1
  WEND
  WHILE (c > 0)
        g = 2 * c : d = 0 : b = c
        WHILE (b > 0)
              d = d + f (b) * a : g = g - 1 : f (b) = d MOD g
              d = d \ g : g = g - 1 : b = b - 1
              IF (b <> 0) THEN d = d * b
        WEND
        c = c - 14 : x$ = STR$ (e + d \ a) : L = LEN (x$)
        PRINT LEFT$ ("0000", 5 - L) ; RIGHT$ (x$, L - 1) ;
        e = d MOD a
  WEND
```

J'avais proposé ces programmes en mai 1994 dans un article de la revue *Pour la Science* (le premier m'avait été communiqué par Éric Wegrzynowski qui l'avait trouvé sur réseau *Internet*, le second est une traduction effectuée par Philippe Mathieu). Je n'expliquais pas leur fonctionnement, car je ne le connaissais pas à l'époque. Un certain nombre de lecteurs m'ont alors écrit pour me proposer des solutions. Les meilleures étaient celles de Francis Dalaudier, Emmanuel Dimarellis, François Balsalobre, Alain Desprès, Robert Domain, Claude Chaunier, Gilles Esposito-Farèse, Jean-Paul Michel, René Manzoni et Daniel Saada, auteur d'un article sur cette méthode de calcul de π *(voir la bibliographie)*. Je les remercie, car c'est grâce à leur travail que je peux donner des éclaircissements sur ce qui apparaissait auparavant comme un miracle. Rien n'illustre mieux l'ingéniosité mise en œuvre dans certains programmes de calcul de π.

Signalons au préalable que certains langages possèdent des instructions spéciales donnant un accès immédiat à un grand nombre de décimales de π. Par exemple, en langage *Maple* (langage de calcul formel très utilisé à la fois par les ingénieurs et dans les divers cycles d'enseignement scientifique), le programme d'une ligne :

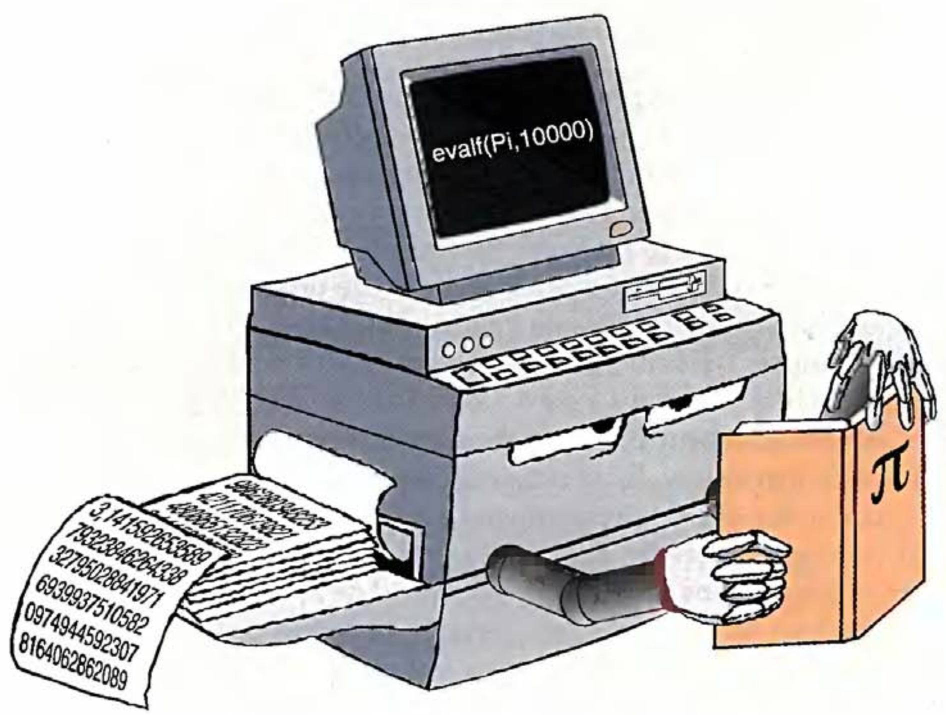
evalf(Pi,10000) ;

provoque instantanément l'affichage de 10 000 décimales de π. Chose étrange, le programme :

evalf(Pi,10001) ;

donne 10 001 décimales de π, mais au bout d'un temps incomparablement plus long. Cela s'explique parfaitement. Tout d'abord, *Maple* contient dans ses propres bibliothèques des sous-programmes de calcul de π, qu'il est donc inutile de reprogrammer (ces sous-programmes utilisent des méthodes expliquées au prochain chapitre). Ensuite, sachant que de nombreux utilisateurs vont demander à avoir 100, 1 000 ou même 10 000 décimales de π, les concepteurs de *Maple* ont écrit explicitement dans un sous-programme les 10 000 premières décimales de π, que le logiciel se contente de recopier quand on le lui demande. En jargon informatique, on dit que les 10 000 décimales de π ont été mises «en dur» dans *Maple*. Cela permet bien évidemment de répondre instantanément aux amateurs pas trop exigeants, et cela explique la discontinuité entre 10 000 et 10 001 (il se peut que, pour me faire mentir, les programmeurs écrivent *en dur*, dans la prochaine version de *Maple*, 10 001 décimales de π, déplaçant ainsi la discontinuité).

Bien entendu, ce qui nous intéresse ici, c'est le calcul de π *ex nihilo* et «sans tricher», ce que font effectivement les deux programmes de la page 95. Mais comment ?



Le programme le plus rapide pour afficher 10 000 décimales de π est le programme qui lit une base de données dans laquelle se trouvent les décimales de π. C'est ce qu'ont bien compris les ingénieurs de chez Maple.

Une série d'Euler judicieusement utilisée

Ces programmes utilisent une série due à Euler, que nous avons déjà rencontrée au chapitre 4 :

$$\pi = 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\times 2}{3\times 5}+\frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7}+\frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7\times 9}+\cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times 2\times \ldots n}{1\times 3\times \ldots(2n+1)}$$

Puisque les termes de la série sont strictement positifs, la suite converge vers π par valeurs inférieures. Le rapport de deux termes consécutifs est inférieur à 1/2, si bien que l'erreur commise en s'arrêtant au terme n est inférieure au dernier terme utilisé (en effet, si le rapport de deux termes consécutifs était égal à 1/2, l'erreur correspondrait à la somme infinie $a_n/2 + a_n/2^2 + a_n/2^3 + \ldots$, qui est égale à a_n). Par conséquent, pour connaître π avec une précision de n décimales, il suffit de sommer $\log_2(10^n) \approx 3{,}32\,n$ termes.

La série d'Euler ne converge pas très rapidement ; elle converge même plus lentement que la méthode d'Archimède, où les calculs sont toutefois plus complexes (puisqu'il faut extraire des racines carrées). Cette série convient bien pour un programme court donnant quelques centaines de décimales, mais si l'on en voulait davantage, elle serait inadéquate.

Comme les calculs sont effectués en base 10 000, à la fin du calcul, les chiffres sont affichés par groupe de 4. Cela explique le *printf("%.4d"* de la version en langage C. En langage *Basic*, une difficulté est créée lors de l'impression à cause de la suppression des zéros précédant un entier (par exemple, 21 n'est pas affiché 0021 comme on le souhaiterait). C'est ce qui justifie le *PRINT LEFT$("0000", 5 - L) ; RIGHT$(x$, L - 1)*.

Le programme calcule 600 «chiffres» en base 10 000, ce qui équivaut à 2 400 chiffres décimaux. En utilisant la relation précédente sur la convergence de la série, on vérifie que le nombre de termes utilisés est $600 \times 4 \times 3{,}32 \approx 8\,400$ (arrondi par excès), nombre qui apparaît dans la première ligne du programme. La valeur $14 \approx 4 \times 3{,}32$ apparaît pour la même raison dans la partie du programme commandant le décalage entre chiffres successifs. Les chiffres sont stockés dans un tableau noté *f( )*. Le programme comporte une boucle d'initialisation, suivie d'une double boucle qui effectue le calcul et l'impression.

Le calcul effectué dans la double boucle correspond à l'exploitation de la série terme par terme lorsqu'on l'écrit sous une forme particulière (appelée forme de Horner et fréquemment utilisée pour limiter le nombre de multiplications lors de l'évaluation des polynômes) :

$$1\,000\,\pi \approx \frac{10\,000}{5}\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(\cdots+\frac{8\,399}{16\,799}\right)\right)\right)\right)$$

Le programme obtient progressivement les bons chiffres du début de π, et il les affiche aussitôt. En même temps, il utilise la partie du tableau non affichée pour stocker une sorte de reste dont il a besoin pour obtenir les décimales suivantes : comme nous l'avons vu au début du chapitre, il faut calculer dès le début avec un nombre de chiffres de l'ordre de celui voulu à la fin.

Les algorithmes compte-gouttes : π au tableau

Pour comprendre plus finement encore le calcul effectué par ces programmes, examinons-en maintenant une version «manuelle», qui constitue également (indépendamment de tout programme informatique) une méthode explicite de calcul de π. On peut l'apprendre au même titre que les méthodes de multiplication ou de division à la main, où l'on doit disposer des rangées de chiffres, ou que celle du calcul de racines carrées rappelée page 105.

Les idées exploitées dans cette méthode de calcul de π sont dues à A. Sale, qui les avait d'abord appliquées au calcul du nombre *e* en 1968. L'adaptation au calcul de π a été proposée en 1988 par Daniel Saada et, indépendamment, par Stanley Rabinowitz en 1991. Il est probable que l'auteur du programme C de 158 caractères a eu connaissance de l'article de 1991 de Rabinowitz. Certaines subtilités *(voir plus loin)* interviennent dans l'évaluation de l'erreur pour assurer que les chiffres fournis sont corrects. Pour un calcul plus poussé de π, elles devraient être prises en compte *a priori*, et non pas *a posteriori*, en constatant, après comparaison avec un autre calcul, que l'algorithme ne se trompe pas ! Cette analyse détaillée de l'algorithme a été faite en 1995 par Stanley Rabinowitz et Stan Wagon *(voir page 100)*.

En réorganisant soigneusement les calculs effectués par le programme, on élabore une méthode de calcul de π à la main qui porte le nom «d'algorithme compte-gouttes». Si l'on est bon calculateur, on obtient en quelques heures, par cette méthode, autant de décimales de π que Ludolff von Ceulen, qui s'acharna pendant des années sur ce calcul. Les algorithmes compte-gouttes pour *e* et π ont été popularisés en septembre 1995 par Ian Stewart dans la revue *Pour la Science*.

Pour calculer π avec cette technique, on est amené à faire une série de petits calculs, comme lorsqu'on pose une division. Les décimales arrivent une à une, goutte à goutte. Le résultat est obtenu plus lentement que lors d'une division, mais le procédé reste tout à fait fascinant. Il est amusant que cette méthode n'ait été découverte que si récemment.

Règles de remplissage du tableau

• Initialisation : *(a)* on remplit la ligne A avec la suite des nombres entiers et la ligne B avec la suite des nombres impairs ; *(b)* on remplit la ligne «début» avec des «2», puis on place des «0» sur toutes les lignes «retenue» de la dernière colonne («**0**» en gras) ; *(c)* On remplit la première ligne «×10» en multipliant la ligne précédente par 10.

• En partant du bord droit du tableau et en allant vers la gauche, on remplit progressivement les trois lignes «retenue», «somme» et «reste» du premier sous-tableau : *(a)* on fait la somme des nombres des lignes «×10» et «retenue» ; *(b)* on place le résultat dans la ligne «somme» ; *(c)* on évalue alors le quotient de cette somme par le nombre de la ligne B situé dans la même colonne ; cette opération donne d'une part un reste que l'on place sur la ligne «reste», et d'autre part un quotient que l'on multiplie par le nombre de la ligne A (toujours dans la même colonne), ce qui donne un nombre n que l'on place dans la ligne «retenue» de la colonne précédente ; *(d)* on continue de la même façon en progressant vers la gauche. Au début, 20 + 0 donne 20 qui, divisé par 25, donne un reste de 20 et un quotient de 0. Le quotient est ainsi «0», trois fois de suite. Puis, lorsqu'on arrive à la colonne 9, on trouve

A	π	*r*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B			3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
début		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
×10		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
retenue		10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	0	0	**0**
somme	**3**	30	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20	20	20
reste		0	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20	20	20
×10		0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200	200	200
retenue		13	20	33	40	65	48	98	88	72	150	132	96	**0**
somme	**1**	13	40	53	80	95	148	108	218	192	160	332	296	200
reste		3	1	3	3	5	5	4	8	5	8	17	20	0
×10		30	10	30	30	50	50	40	80	50	80	170	200	0
retenue		11	24	30	40	40	42	63	64	90	120	88	0	**0**
somme	**4**	41	34	60	70	90	92	103	144	140	200	258	200	0
reste		1	1	0	0	0	4	12	9	4	10	6	16	0
×10		10	10	0	0	0	40	120	90	40	100	60	160	0
retenue		4	2	9	24	55	84	63	48	72	60	66	0	**0**
somme	**1**	14	12	9	24	55	124	183	138	112	160	126	160	0
reste		4	0	4	3	1	3	1	3	10	8	0	22	0

Pour obtenir n chiffres de π par l'algorithme compte-gouttes, il faut partir d'un tableau de largeur $3{,}4 \times N$ et calculer N sous-tableaux. Les nombres en rouge illustrent une étape du remplissage du premier sous-tableau : dans la colonne 9, on porte sur la ligne somme 20 + 0 = 20. Ce nombre est alors divisé par le nombre B de la colonne, 19. On écrit le reste de la division, 1, sous la ligne somme. Quant au quotient, aussi égal à 1, il est multiplié par le numéro de la colonne, ce qui donne 9 ; ce produit est reporté sur la ligne retenue de la colonne 8, et on recommence les mêmes opérations dans cette nouvelle colonne.

que 20 divisé par 19 donne un reste de 1, et que le quotient 1 multiplié par 9 donne 9. Ensuite, 9 + 20 donne 29 qui, divisé par 17, donne un reste de 12 et un quotient de 1 ; celui-ci, multiplié par 8, donne 8, d'où la somme suivante, 28, etc.

• Une fois le premier sous-tableau rempli, en enlevant un chiffre au nombre de la colonne r, on trouve le premier chiffre de π : 3.

• Pour le deuxième chiffre de π, on remplit d'abord la colonne «×10» du deuxième sous-tableau, en multipliant la ligne «reste» du premier sous-tableau par 10. En repartant de la droite, on remplit comme précédemment toutes les cases du deuxième sous-tableau. Une fois ce dernier rempli, on trouve le deuxième chiffre de π en enlevant un chiffre au nombre de la colonne r.

• Pour obtenir n chiffres de π, il faut initialiser un tableau à $3{,}32 \times n$ colonnes (arrondi à la valeur supérieure) avec des «2». Dans notre exemple, nous devons nous arrêter dès que nous avons trois décimales de π. Un chiffre obtenu n'est garanti exact que s'il est suivi d'un chiffre différent de 9. En outre, on trouve parfois le «chiffre» 10 (lorsqu'un nombre plus grand que 100 se trouve dans la colonne r). Il faut alors modifier le précédent chiffre de π en l'augmentant d'une unité. Heureusement, cela se produit rarement : en partant d'un tableau de 116 «2» (bon pour 35 décimales), on trouve le chiffre «4» au 32^e sous-tableau, puis le chiffre «10» au 33^e sous-tableau, ce qui amène à corriger le «4» précédent en «5».

Le calcul en bases à pas variable

Une façon d'interpréter les calculs réalisés par l'algorithme compte-gouttes est de considérer la notion de *base de numération à pas variable*.

Le nombre π en base 10, c'est-à-dire dans la base à pas constant $\boldsymbol{d} = [1/10, 1/10, 1/10, \ldots]$, s'écrit $\pi_d = [3; 1, 4, 1, 5, \ldots]$, car :

$$\pi = \left(3 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\left(5 + \frac{1}{10}\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$

Or on a vu précédemment que la série d'Euler pouvait s'écrire :

$$\pi = \left(2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \frac{4}{9}\left(2 + \frac{5}{11}\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$

En généralisant la notation précédente, on dit que π, dans la base à pas variable $\boldsymbol{b} = [1/3, 2/5, 3/7, 4/9, \ldots]$, s'écrit : $\pi_b = [2; 2, 2, 2, \ldots]$.

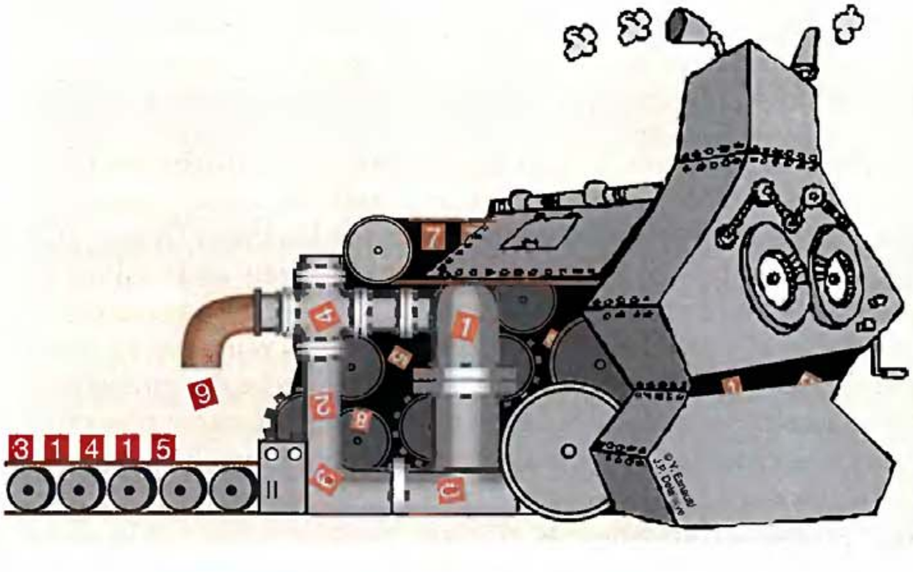
Dans ce contexte, l'algorithme compte-gouttes n'est que l'algorithme de conversion qui fait passer de π écrit en base $\boldsymbol{b}$ à π écrit en base $\boldsymbol{d}$. Voici l'explication de cette conversion :

Soit π' la somme partielle des 13 premiers termes de la série d'Euler de π. On voit que la première ligne du tableau, (2, 2, 2, ..), correspond à π' écrit dans la base $\boldsymbol{b}$.

On obtient la première ligne du premier sous-tableau en multipliant par 10 chaque chiffre de π' en base $\boldsymbol{b}$; elle contient donc une expression de $10\pi'$ en base $\boldsymbol{b}$. Toutefois cette expression n'est pas «normalisée», car certains de ses «chiffres» sont supérieurs aux dénominateurs des fractions de la base à pas variable $\boldsymbol{b}$. C'est exactement comme si, en base 10, on multipliait par 5 sans précaution chaque chiffre du nombre 453, ce qui donnerait [20 25 15]. Pour arriver à l'écriture «normalisée» 2265 (qui n'utilise que les chiffres de 0 à 9), il faut convertir [20 25 15] en partant du dernier «chiffre» et en faisant passer les retenues de droite à gauche : du 15, on retient le 5 et on passe au «chiffre» suivant avec la retenue 1 qui, ajoutée au 25, donne un 6 et une retenue de 2, etc. Le travail effectué lors du remplissage du premier sous-tableau correspond exactement à cette réécriture sous forme normalisée dans le cadre de la base particulière [1/3, 2/5, 3/7, 4/9, ...].

L'entier 30 se trouve en tête de cette forme normalisée de $10\pi'$, ce qui signifie que π' commence par 3. La dernière ligne du premier sous-tableau contient donc le nombre $10\pi' - 30 = 1{,}415...$ en base $\boldsymbol{b}$. Dans le sous-tableau suivant, on effectue la mise sous forme normalisée de $10(10\pi' - 30) = 100\pi' - 300$ en base $\boldsymbol{b}$. Ce nombre commence par 13, ce qui signifie que π' a un «1» pour première décimale après la virgule, et ainsi de suite. Au total, le calcul des sous-tableaux est simplement la conversion en base 10 de π', qu'on avait écrit au départ en base $\boldsymbol{b}$.

Les algorithmes compte-gouttes (comme les programmes donnés précédemment, qui en sont la traduction) n'utilisent pas de nombres réels et n'ont besoin que d'entiers de taille raisonnable (si l'on n'est pas trop ambitieux). Par exemple, pour obtenir 1 000 décimales de π, des entiers de longueur 10 suffisent. Cette propriété n'a rien d'extraordinaire, car elle est commune à la grande majorité des algorithmes de



Goutte à goutte, la machine de l'algorithme compte-gouttes produit des décimales de π.

calcul de π ; ceux-ci, puisqu'ils reprogramment les algorithmes d'addition et de multiplication, n'utilisent en définitive que des entiers. Tout un mécanisme de report de retenue est présent dans les algorithmes compte-gouttes qui, à leur façon (très élégante), reprogramment aussi une arithmétique entre grands nombres (en fait, ils reprogramment la conversion de l'arithmétique en base $\boldsymbol{b}$ à l'arithmétique en base 10).

En conclusion, les algorithmes compte-gouttes sont une jolie trouvaille qui permet, d'une part, d'écrire des programmes courts pour calculer π et, d'autre part, d'effectuer à la main un calcul agréable de π. Toutefois, ils ne présentent aucun autre progrès par rapport à ce qui existait en 1974, car :

– il faut savoir jusqu'où on souhaite aller avant de commencer ; si l'on décide d'aller loin dans la suite des décimales de π, il faudra,dès le départ, faire de longs calculs (on ne peut pas décider en cours de route le nombre de gouttes que l'on veut !) ;

– pour calculer n décimales de π, les algorithmes compte-gouttes ont besoin d'un espace mémoire de taille proportionnelle à n, à la différence des algorithmes déduits de la formule de Bailey-Borwein-Plouffe, que nous décrirons au chapitre 8 ;

– pour calculer n décimales de π, la durée des calculs est proportionnelle à n^2 (ou même à $n^2 \times \ln(n)$). Avant 1974, tous les algorithmes utilisés pour calculer π étaient dans ce cas. Toutefois, en utilisant les méthodes de multiplication rapide, on peut faire une économie de temps considérable, comme nous le verrons au prochain chapitre.

Signalons pour finir la formule suivante, démontrée il y a quelques années par William Gosper, et qui pourrait donner lieu à un algorithme compte-gouttes plus efficace que le précédent :

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2\times 3}{7\times 8\times 3}\left(13 + \frac{3\times 5}{10\times 11\times 3}\left(18 + \frac{4\times 7}{13\times 14\times 3}\left(\ldots\right)\right)\right)\right)$$

Accélération de la convergence

En fait, la série d'Euler utilisée pour les algorithmes compte-gouttes résulte de l'application d'une méthode d'accélération de la convergence à la série affreusement lente de Madhava-Gregory-Leibniz. C'est un bel exemple d'une technique dont nous allons dire quelques mots. En analyse numérique, on ne cherche pas seulement à calculer π, et l'on rencontre souvent des suites numériques dont on veut évaluer la limite. C'est pourquoi l'on a cherché des méthodes qui transforment les suites lentement convergentes en suites plus rapidement convergentes. Les mathématiciens ont trouvé de nombreuses méthodes d'accélération, mais nous nous contenterons d'en présenter une, qui est à la fois simple et efficace.

Le procédé delta-2 d'Aitken, inventé en 1926 par le mathématicien et calculateur prodige Alexander Aitken, consiste à définir, à partir de la suite x_n que l'on veut accélérer, une nouvelle suite t_n de terme général (pour $n \geq 2$) :

$$t_n = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^{\;2}}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$

et dont la limite est la même que celle de x_n. Cette formule est utilisable dès que l'on dispose de trois termes consécutifs x_{n-2}, x_{n-1} et x_n de la suite à accélérer.

En appliquant le delta-2 d'Aitken à la série de Madhava-Gregory-Leibniz, dont la convergence est particulièrement lente ($x_{500} = 3{,}14358$, soit seulement deux décimales exactes !), on obtient une nouvelle suite t_n bien plus rapide :

$$\begin{aligned} t_2 &= 3{,}1666 \\ t_{10} &= 3{,}1418396 \\ t_{50} &= 3{,}14159465 \\ t_{500} &= 3{,}14159265559 \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, on montre qu'à un certain rang, l'erreur commise par t_n est dix fois inférieure à celle commise par x_n, puis 100 fois inférieure un peu plus loin, puis 1 000 fois inférieure encore plus loin, etc. Autrement dit, la quantité $(\pi - t_n)/(\pi - x_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. C'est la définition précise de l'expression «la suite t_n accélère la convergence de la suite x_n».

La méthode d'Aitken est fondée sur une idée élémentaire que nous allons expliquer, car elle est caractéristique des méthodes d'accélération. Le procédé delta-2 d'Aitken est ajusté pour traiter parfaitement les suites géométriques, c'est-à-dire de la forme $L + a \times b^n$: si $|b|$ est inférieur à 1, une telle suite converge vers L, car b^n devient de plus en plus petit quand n augmente. Quand la suite à accélérer est réellement une suite géométrique, le procédé donne directement la limite L dès que trois termes sont disponibles. Ce cas ne se présente bien sûr jamais (les suites que l'on étudie sont plus compliquées), mais quand la suite traitée ressemble suffisamment à une suite géométrique, comme c'est le cas de la série de Madhava-Gregory-Leibniz, le procédé en accélère la convergence. Le principe heuristique général s'énonce ainsi :

«essayer de deviner la limite en partant d'une hypothèse de régularité de la suite ; si ça ne marche pas, ça permettra peut-être d'en accélérer la convergence.»

C'est une idée très simple qui fonctionne d'une manière étonnante, car il n'est pas rare qu'une suite numérique ressemble suffisamment à une suite géométrique. Mais que signifie ce «suffisamment» ? L'un des résultats obtenus au sujet du delta-2 précise cette condition : le terme «écart» désignant la différence de deux termes consécutifs de la suite x_n, si la suite des rapports de deux écarts consécutifs converge vers une limite non nulle b comprise entre -1 et $+1$, alors la suite donnée par le procédé delta-2 d'Aitken accélère la suite x_n (au sens indiqué précédemment). En bref : si x_n est convergente, de limite L, et que $(x_{n+2}-x_{n+1})/(x_{n+1}-x_n)$ converge vers un nombre b tel que $b \neq 0$ et $-1 \leq b < 1$ (la convergence de x_n est alors dite linéaire), alors $(L-t_n)/(L-x_n)$ tend vers zéro. La série de Madhava-Gregory-Leibniz possède effectivement une convergence linéaire, il était donc normal qu'elle soit accélérée par le delta-2 d'Aitken.

Bien d'autres propriétés de cette formule en apparence simple ont été démontrées ; en particulier, on a prouvé que le procédé delta-2 d'Aitken était optimal pour l'accélération des suites à convergence linéaire. Le résultat précis s'énonce ainsi :
• il n'existe pas de formule algébrique plus simple qui accélère la convergence de toutes les suites à convergence linéaire, et ;
• il n'existe pas de méthode transformant x_n en t_n et de nombre $\varepsilon > 0$ tels que $|L-t_n|/|L-x_n|^{1+\varepsilon}$ tende vers 0 pour toute suite à convergence linéaire (le taux d'accélération de 1 donné par le delta-2 ne peut donc pas être amélioré en $1+\varepsilon$).

Les méthodes d'accélération de la convergence, aussi intéressantes soient-elles, sont toutefois incapables de résoudre tous les problèmes de convergence. Dans les cas très spécifiques, tel le calcul de π, il est souvent plus intéressant de trouver directement une méthode qui converge vite que de choisir une méthode qui converge lentement pour l'accélérer ensuite. Certains résultats négatifs expliquent d'ailleurs pourquoi il ne faut pas tout attendre des transformations accélératrices.

Voici deux de ces résultats. Le premier montre que les suites à convergence lente ne peuvent être accélérées que de manière exceptionnelle. Le second montre qu'il en est de même pour les suites à convergence très rapide.
• On dit qu'une suite de limite L est à convergence logarithmique si le rapport des erreurs de deux termes consécutifs, $(L-x_{n+1})/(L-x_n)$, s'approche de 1 quand n augmente. Pour une telle suite, plus on va loin, moins les progrès sont rapides. On connaît beaucoup de suites à convergence logarithmique qui sont accélérées par telle ou telle méthode, et l'on a même espéré que l'on pourrait trouver une méthode universelle pour les suites à convergence logarithmique : après tout, si elles sont lentes il doit bien être possible de les faire se presser un peu ! Ce rêve s'est envolé, car nous disposons de la preuve qu'aucune transformation de suites n'est efficace pour l'accélération de toutes les suites à convergence logarithmique. Autrement dit, vous pouvez espérer accélérer certaines suites à convergence logarithmique, mais vous ne pourrez jamais les accélérer toutes par une même méthode : les suites à convergence logarithmique sont si nombreuses, et, derrière

leur apparente régularité, elles se comportent de manière si désordonnée et si variée qu'aucune méthode n'arrivera jamais à les maîtriser globalement.

• L'autre résultat concerne les suites dont le rapport des erreurs de deux termes consécutifs tend vers zéro. Ce sont des suites qui convergent de plus en plus rapidement : le nombre moyen de chiffres gagnés à chaque itération va en augmentant. On pourrait considérer qu'il n'est pas très utile d'accélérer de telles suites... et c'est d'ailleurs impossible ! Comme dans le cas des suites à convergence logarithmique, il est aujourd'hui prouvé qu'aucune méthode d'accélération ne peut accélérer toutes les suites dont le rapport des erreurs de deux termes consécutifs tend vers zéro.

Le principe de ces démonstrations d'impossibilité est l'analogue mathématique de la chasse au tigre : on tend un piège à la méthode d'accélération dont on suppose l'existence (et qui aurait par exemple le pouvoir d'accélérer toutes les suites à convergence logarithmique). Pour cela, on lui donne certaines suites particulières et on note son comportement. Au bout d'un certain temps, on en sait assez sur «ses habitudes» et on lui concocte alors une suite qu'elle est dans l'impossibilité d'accélérer. Comme autre résultat négatif, on a établi que la réunion de deux familles accélérables n'est pas forcément accélérable. Cela prouve que les procédés de composition d'algorithmes d'accélération ne réussissent pas toujours à synthétiser les bonnes propriétés des méthodes d'accélération qu'ils composent.

Sur toutes ces questions, on consultera les livres de Claude Brezinski indiqués dans la bibliographie ou mon ouvrage sur les transformations de suites qui est plus particulièrement consacré aux résultats de limitation.

Annexe : l'extraction de racines carrées

Il existe une méthode d'extraction des racines carrées, posée sous la forme d'une sorte de division, qui permet de calculer des racines carrées avec une précision aussi grande qu'on le souhaite, aussi bien à la main qu'avec une machine. Au prochain chapitre, nous verrons une autre méthode de calcul des racines carrées, mais nous rappelons ici, pour le plaisir, cette ancienne et belle méthode.

Elle ramène la recherche de la racine carrée d'un entier de longueur n à $n/2$ multiplications environ d'un entier long par un entier court. Cela ne convient pas pour de très grands calculs (sauf si on regroupe les diverses multiplications intermédiaires, mais il est alors plus simple d'utiliser la méthode de Newton, expliquée au prochain chapitre, avec une multiplication rapide). En revanche, cette méthode

	8 9 4 1 5 2 1 3	$x\ y\ z\ t$ 9 4 5 5
9×9 $[x \times x]$ →	− 8 1	
	8 4 1	
184×4 $[(2 \times x)y \times y]$ →	− 7 3 6	
	1 0 5 5 2	
1885×5 $[(2 \times xy)z \times z]$ →	− 9 4 2 5	
	1 1 2 7 1 3	
18905×5 $[(2 \times xyz)t \times t]$ →	− 9 4 5 2 5	
	1 8 1 8 8	

On a bien : $9\,455 \times 9\,455 + 18\,188 = 89\,415\,213$
et : $9\,455 < \sqrt{89\,415\,213} < 9\,456$

peut être utile pour des calculs de taille moyenne (jusqu'à quelques millions de décimales), programmés à partir des formules d'Eugène Salamin et Richard Brent présentées au chapitre suivant.

Après avoir séparé le nombre dont on cherche la racine carrée en tranches de deux chiffres en partant de la droite, on considère la première tranche de gauche, et on cherche le plus grand entier x dont le carré soit inférieur à cette tranche. Dans l'exemple ci dessus, $x = 9$, car $9 \times 9 = 81$ est le plus grand carré inférieur à 89. Après soustraction, il reste 8. On descend deux chiffres de plus, ce qui donne 841. On cherche à présent le plus grand entier y tel que $[2x]y \times y$ (on accole le chiffre y au produit $2x$, puis on multiplie le résultat par y) soit inférieur à 841. Ici $y = 5$ ne convient pas, car $185 \times 5 = 925$ est trop grand. En revanche, $y = 4$ convient, car $184 \times 4 = 736$. On continue de même jusqu'à ce que toutes les tranches de deux chiffres soient abaissées.

7

Les mathématiques vivantes

Atteindre un milliard de décimales

Pour aller loin, mieux vaut réfléchir avant de prendre son crayon ou son ordinateur. C'est ce que démontre l'histoire de π au cours des 25 dernières années. Les évidences les mieux acceptées doivent être révisées : en y regardant de près et contre toute attente, la multiplication usuelle n'est pas la méthode la plus efficace et doit être remplacée dans les grands calculs par une méthode plus complexe (à concevoir et à programmer), mais bien plus performante. En outre, on améliore sensiblement les formules des arcs tangentes, qui ont régné sur π pendant presque trois siècles, en tenant compte des idées, longtemps mal comprises, du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan. L'extraordinaire perfectionnement des ordinateurs et des logiciels s'ajoutant à ces deux avancées théoriques, les mathématiciens et les informaticiens ont été conduits à une connaissance de π au-delà de ce qu'on jugeait possible.

Du million au milliard : 40 ans au moins ?

Jusqu'en 1973, les meilleures méthodes pour calculer π (qu'elles soient fondées sur les séries des arcs tangentes ou sur d'autres séries) ont la propriété suivante : pour doubler le nombre n de décimales obtenues, il faut multiplier des entiers deux fois plus longs, ce qui, avec l'algorithme naturel de multiplication (celui de l'école), multiplie la quantité de calculs élémentaires par 4 (pensez à la taille du tableau utilisé pour disposer les calculs, qui augmente à la fois en largeur et en profondeur). Comme le nombre de termes à prendre en compte dans les séries augmente simultanément, la complexité (évaluée en nombre d'opérations élémentaires) fait plus que quadrupler. On dit que la complexité de ces algorithmes est supérieure à n^2 (le plus souvent, elle est en $n^2 \times \ln(n)$).

Les algorithmes compte-gouttes du chapitre précédent, bien que plus récents, possèdent aussi une complexité au moins en $n^2 \times \ln(n)$. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que, d'une part, la largeur du tableau et le nombre de sous-tableaux augmentent proportionnellement au nombre de décimales voulu, et que, d'autre part, la longueur des nombres terminant les deux premières lignes augmente proportionnellement à $\ln(n)$, ce qui conduit, lors des calculs élémentaires pour remplir une case, à une augmentation du travail au moins proportionnelle à $\ln(n)$ (et en fait proportionnelle à $(\ln(n))^2$ si on se contente d'une programmation simple).

Au total, pour passer de un million de décimales à un milliard de décimales, c'est-à-dire pour gagner un facteur 1 000, il aurait fallu disposer de machines un million de fois ($1\,000 \times 1\,000$) plus puissantes, ce qui correspond à 20 doublements de puissance (puisque $2^{20} = 1\,048\,576$).

Suivant la loi de Moore, énoncée en 1965 et à peu près vérifiée depuis, la puissance des ordinateurs, mesurée par le nombre de transistors que l'on réussit à placer sur un millimètre carré de puce, double tous les 18 mois. Supposons que cette loi empirique continue à être satisfaite dans les années à venir. Dans cette hypothèse, en ne comptant que sur l'accroissement de puissance des machines, 30 ans auraient été nécessaires pour passer de un million de décimales (atteint en 1973) à un milliard de décimales de π ; il aurait donc fallu attendre l'année 2003.

Pour des raisons économiques (mais aussi de physique fondamentale), il est douteux que la loi de Moore reste vraie longtemps : le coût de mise au point des microprocesseurs double tous les quatre ans – c'est la loi de Rock –, et on est arrivé à des investissements si élevés que l'on ne pourra pas continuer au rythme actuel. En outre, la loi de Moore apparaît dès aujourd'hui trop optimiste ; Hans Moravec, qui a étudié avec soin l'évolution des puissances de calcul, propose de considérer plutôt que la puissance des machines est multipliée par 1 000 tous les 20 ans ou, ce qui revient au même, qu'elle double tous les deux ans.

En résumé, pour accéder à un milliard de décimales de π en ne comptant que sur l'évolution des ordinateurs, nous aurions dû attendre 20 doublements de puissance, soit près de 40 ans dans cette hypothèse plus réaliste, ce qui nous aurait amené aux alentours de 2010.

Pourtant, le milliard de décimales a été atteint en 1989 par les frères Gregory et David Chudnovsky. Le but de ce chapitre est d'expliquer comment on a gagné une vingtaine d'années. Auparavant, faisons un effort pour comprendre ce que signifie *un milliard de décimales de* π :

• à raison d'un chiffre par millimètre (ce qui est très petit et permet tout juste de les lire), il faudrait un ruban d'un kilomètre pour écrire le million de décimales de J. Guilloud et M. Bouyer, et il faudrait un ruban de 1 000 kilomètres pour écrire le milliard des frères Chudnovsky.

• Un ouvrage de 400 pages de 50 lignes de 50 caractères contient un million de caractères ; s'ils avaient voulu éditer leurs décimales, les frères Chudnovsky auraient dû publier d'un coup 1 000 volumes (ce qui aurait constitué un autre record !), et ces livres auraient demandé trois ans de lecture à un fou s'imposant d'en lire un chaque jour.

Remarquons également que le nombre de «lettres» du génome humain est évalué à trois milliards environ. L'homme vient de réussir (difficilement et de manière exceptionnelle pour l'instant) des calculs de même ampleur que les opérations effectuées des millions de fois chaque seconde par la machine biologique de notre corps, puisque la division cellulaire nécessite une duplication de l'information génétique. C'est une étape remarquable. Il se peut d'ailleurs que l'insuccès relatif des recherches dans le domaine de l'Intelligence artificielle soit dû aux faibles capacités de calcul de nos machines, par rapport à celles des machines biologiques qui nous constituent et que nos techniques commencent tout juste à rattraper. Ce point de vue a été soutenu en 1988 par H. Moravec, qui a aussi évalué que l'équivalent en puissance de calcul d'un humain sera atteint par les techniques informatiques vers l'année 2020.

Comment gagner 20 ans ?

Comment a-t-on gagné 20 ans dans la course au milliard ? Grâce aux mathématiques. De nouvelles formules ont été découvertes, ainsi que des méthodes pour calculer les produits de grands entiers. Ces progrès mathématiques sont d'ailleurs plus importants que les décimales de π qui, nous l'avons déjà dit, ne servent pas à grand chose.

Les nouvelles méthodes de calcul de π se généralisent au calcul des fonctions trigonométriques et hyperboliques, et permettent d'élaborer des algorithmes et des circuits de plus en plus efficaces. Ces innovations sont utiles dans les applications graphiques de l'informatique et, en particulier, en synthèse et en analyse d'images. Les belles séquences de film engendrées par ordinateur, largement diffusées aujourd'hui, les outils d'exploration et d'imagerie médicale ainsi que certaines méthodes de compression de données sont des résultats indirects des recherches entreprises par les chasseurs de décimales de π. La compréhension mathématique générale des problèmes posés par le calcul de π entraîne une amélioration de toutes les méthodes de calcul des fonctions mathématiques et, plus généralement encore, participe à un mouvement profond d'algorithmisation des mathématiques dont les retombées pratiques sont innombrables.

La multiplication rapide

Nous le savons tous : quand on multiplie deux nombres par la méthode apprise à l'école, la longueur du calcul augmente avec la taille des nombres. Toutefois, comme nous l'avons déjà dit, cette inflation du calcul devient vite préoccupante car, quand on double la taille des nombres, on multiplie par quatre le temps de calcul, et quand on multiplie par 10 la taille des nombres, on multiplie par 100 le temps de calcul. La multiplication habituelle demande un travail proportionnel à n^2. Autrement dit, le temps nécessaire à un calcul, ou bien le nombre d'opérations élémentaires effectuées par la machine durant le calcul, est approximativement Cn^2 (C étant une constante dont on ne s'occupera pas ici, mais qui, évidemment, n'est pas sans importance).

Aussi étonnant que cela paraisse, il existe des méthodes de calcul du produit de deux nombres où la durée n'augmente pas si rapidement avec la taille des nombres. En utilisant ces méthodes dans le cas de grandes multiplications, on réalise des économies très appréciables de travail et de temps.

Le premier à avoir découvert que l'on pouvait faire mieux que l'algorithme traditionnel semble être A. Karatsuba. Celui-ci, en 1962, observa qu'un entier de taille $2k$ pouvait s'écrire sous la forme $(a + b10^k)$, où a et b sont deux entiers de k chiffres, et qu'alors le produit de deux entiers de taille $2k$ s'écrivait :

$$(a + b10^k)(c + d10^k) = ac - [(a - b)(c - d) - ac - bd]10^k + bd10^{2k}$$

Lorsqu'on multiplie deux entiers de taille 1 000, cette identité ramène le calcul à trois multiplications (au lieu de quatre) entre entiers de taille $k = 500$ (les produits ac, $(a-b)(c-d)$ et bd), plus des décalages et des additions. En utilisant ce principe récursivement, c'est-à-dire en ramenant chaque multiplication entre entiers de taille 500 à trois multiplications entre entiers de taille 250, puis chacune des multiplications entre entiers de taille 250 à trois multiplications entre entiers de taille 125, etc., on obtient une multiplication qui utilise un nombre d'opérations élémentaires proportionnel à $n^{\log_2 3} = n^{1,58}$. C'est nettement mieux que le n^2 de la multiplication classique, même si, bien sûr, l'organisation des calculs est plus complexe.

En utilisant une identité du même genre, où chaque entier est coupé en trois morceaux au lieu de deux, on fait encore une économie de calcul. De même avec quatre morceaux, etc. On prouve ainsi que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut définir une procédure de multiplication dont la complexité en opérations élémentaires est proportionnelle à $n^{1+\varepsilon}$. Attention : cette proposition ne signifie pas que l'on arrive petit à petit à une complexité de n, et d'ailleurs, personne aujourd'hui ne sait si on peut multiplier des entiers de longueur n en un temps proportionnel à n. On pense que c'est impossible, mais personne ne sait le démontrer.

x	$x^{1,58}$	x^2
1	1	1
10	38,02	100
100	1445,44	10^4
1 000	$54,9 \times 10^3$	10^6
10^6	$30,2 \times 10^8$	10^{12}
10^9	$16,6 \times 10^{13}$	10^{18}
10^{12}	$91,2 \times 10^{17}$	10^{24}

x	$x \ln(x)$	$x \ln(x) \ln(\ln(x))$
1	0	0
10	23,02	19,20
100	460,51	703,29
1 000	6 907,75	13 350,23
10^6	$13,8 \times 10^6$	$36,2 \times 10^6$
10^9	$20,7 \times 10^9$	$62,8 \times 10^9$
10^{12}	$27,6 \times 10^{12}$	$91,7 \times 10^{12}$

Comparaison de la croissance des fonctions x, $x^{1,58}$, x^2, $x \times \ln(x)$ et $x \times \ln(x) \times \ln(\ln(x))$.

En 1968, V. Strassen découvrit une méthode de multiplication fondée sur la technique dite *transformée de Fourier discrète*, introduite en 1965 par J. Cooley et J. Tukey. Grâce à cette méthode, il aboutit en 1971, avec A. Schönhage, à une multiplication en $n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n))$, ce qui est mieux que $n^{1+\varepsilon}$ (car la fonction logarithme est très lentement croissante).

Ce sont d'ailleurs des algorithmes fondés sur la transformée de Fourier discrète qui ont servi aux calculs records de π depuis le début des années 1980. Les principes de ces algorithmes (un peu plus compliqués que ceux de la multiplication de A. Karatsuba) sont expliqués en annexe page 124 et suivantes ; il suffit de retenir que, comme dans l'algorithme de multiplication du chercheur japonais, tout n'est finalement qu'une astuce d'organisation des calculs.

Division et extraction rapide

Multiplier efficacement n'est pas tout, car on rencontre aussi fréquemment des divisions et des calculs de racines carrées ; c'est particulièrement vrai lorsqu'on utilise les nouvelles formules de calcul de π dont nous parlerons dans les prochains paragraphes.

Chose également inattendue, on a découvert qu'en s'y prenant comme il faut, effectuer des divisions ou des calculs de racines carrées ne demande guère plus de temps que faire des multiplications, et se ramène en fait à des multiplications. Ces algorithmes reposent sur la méthode dite de Newton, que celui-ci proposa vers 1669 et qui, trois siècles après, est plus que jamais d'actualité (on trouvera des détails historiques dans le livre de J.-L. Chabert, *Histoire d'algorithmes*, pages 195-226).

Le principe est le suivant : soit une fonction $f(x)$ assez régulière, par exemple continue et ayant des dérivées première et seconde continues, et telle qu'il existe une valeur a pour laquelle $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$; alors, en partant d'un point x_0 pas trop loin de a et en calculant par itération :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n),$$

on définit une suite de nombres x_n qui converge vers a «quadratiquement» : autrement dit, en prenant x_n comme approximation de a, chaque itération double le nombre de décimales exactes.

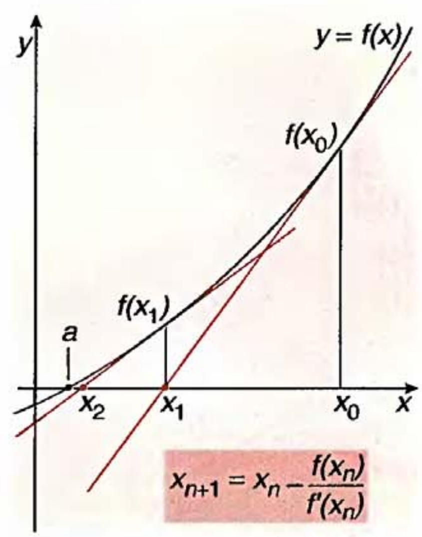
Considérons par exemple la fonction $f(x) = 1/x - b$; la solution de l'équation $f(a) = 0$ est $a = 1/b$, et l'itération (par laquelle on va calculer $1/b$) est :

$$x_{k+1} = 2x_k - bx_k^2$$

La nature quadratique de la convergence vers $1/b$ se voit facilement, car les erreurs de deux termes consécutifs sont reliées par l'égalité suivante :

$$x_{n+1} - 1/b = -b(x_n - 1/b)^2$$

Cette formule d'itération pour calculer l'inverse d'un nombre, comme toutes celles tirées de la méthode de Newton, est stable



La méthode de Newton pour approcher une racine a de l'équation $f(x) = 0$, où $f(x)$ est une fonction suffisamment régulière (possédant des dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ continues). En un point d'abscisse x_0 de la courbe *(en bleu)*, on trace la tangente *(en rouge)* dont la pente est donnée par $f'(x_0)$. Cette droite coupe l'axe des x en x_1. On trace alors la tangente à la courbe au point $[x_1, f(x_1)]$, et ainsi de suite. On voit que $f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$, d'où $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. La suite des x_n converge vers a.

numériquement : le calcul n'est pas gêné par une petite imprécision de départ, qui est compensée automatiquement. Par conséquent, lorsqu'on applique l'itération pour connaître l'inverse d'un entier long (10 000 décimales par exemple), on peut commencer avec quelques décimales seulement, puis doubler le nombre de décimales prises en compte d'une itération à l'autre. Au bout du compte, calculer l'inverse d'un nombre de n chiffres équivaut à peu près, en nombre d'opérations élémentaires, à cinq multiplications de nombres de n chiffres.

Pour la racine carrée, tout se passe aussi bien : on prend la fonction définie par $f(x) = x^2 - b$, et la méthode de Newton donne la suite $x_{k+1} = 1/2\,(x_k + b / x_k)$, qui converge quadratiquement vers $\sqrt{b}$.

En raisonnant comme pour la division, on montre que ce calcul de racine carrée est approximativement sept fois plus «coûteux» qu'une multiplication. Les Babyloniens semblent avoir utilisé une méthode d'extraction des racines carrées correspondant à un ou deux pas de la formule itérative donnée ci-dessus.

Une autre méthode d'extraction de racine carrée *(voir l'annexe du précédent chapitre page 105)*, que l'on apprenait autrefois à l'école, peut convenir pour les calculs de taille moyenne.

Il est finalement remarquable que multiplier soit à peine plus compliqué qu'additionner (car $n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n))$ n'est guère plus grand que n, qui est la complexité en nombre d'opérations élémentaires de l'addition), et que diviser ou extraire des racines carrées ne soit pas non plus beaucoup plus compliqué. Nous ne sommes pas absolument certains de disposer aujourd'hui d'algorithmes optimaux, mais comme il est impossible de faire moins que n, on ne pourra gagner que très peu de complexité.

Au bout du compte, en utilisant ces algorithmes avec les formules efficaces pour π présentées au paragraphe suivant, on obtient des méthodes de calcul de π qui, même si elles ne sont pas très commodes à programmer (et encore moins à exécuter à la main), sont d'une complexité quasi linéaire en temps. Avec de tels programmes, en doublant la puissance d'une machine, on arrive presque à doubler le nombre de décimales calculées de π. *Sauf nouveauté extraordinaire*, on peut donc prévoir ce qui va se passer pour le calcul des décimales de π dans un proche avenir : *un doublement tous les 18 mois ou tous les deux ans du nombre de décimales connues.*

Notons que l'espace mémoire nécessaire pour calculer n décimales de π est aussi de l'ordre de n. Comme il ne peut pas être inférieur (puisqu'il faut bien mémoriser quelque part les décimales calculées), il semble qu'il n'y ait plus rien à attendre de ce côté là non plus.

Toutefois, nous verrons au prochain chapitre qu'il y a eu *une nouveauté extraordinaire*. C'est bien le plus merveilleux dans l'histoire de π : chaque fois qu'on croit qu'elle a connu sa dernière révolution et qu'elle va poursuivre son petit bonhomme de chemin à un pas régulier et prévisible, elle repart de plus belle !

Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

Srinivasa Ramanujan : un génie parfait ?

Avant de décrire ce qui s'est passé du côté des formules de calcul de π, arrêtons-nous sur un personnage hors du commun, le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan, dont les travaux, plus de 50 ans après sa mort, sont associés aux nouvelles formules découvertes depuis 1974.

Ramanujan est né en Inde en 1887 dans une famille pauvre, et y est mort en 1920. Le mathématicien anglais Godfrey Harold Hardy (1877-1947) est le découvreur de Ramanujan, et il est aussi l'Européen qui l'a le mieux connu. En 1940, il rédigea une biographie de Ramanujan où il écrit de lui «qu'il est le personnage le plus romanesque de l'histoire récente des mathématiques ; un homme dont la carrière semble accumuler les contradictions et les paradoxes, et qui défie tous les critères auxquels on est accoutumé à se référer pour juger les autres».

Il faut préciser qu'aujourd'hui encore, la façon dont Ramanujan percevait les mathématiques reste en grande partie mystérieuse. Parmi les nombreuses formules dont il a parsemé ses cahiers, certaines viennent juste d'être démontrées, et d'autres sont encore sans preuve : elles paraissent vraies (ce que l'on teste par le calcul) mais, souvent, on ne comprend pas d'où elles tombent ni comment un être humain a pu les concevoir. Parfois, ces formules sont fausses, mais en les modifiant légèrement, elles deviennent justes, ce qui prouve qu'elles ne sont pas là par hasard. Parfois aussi, elles sont vraiment fausses, et on peut analyser les raisons subtiles qui amenèrent Ramanujan à se tromper. Au sujet de ces erreurs, Hardy dit d'ailleurs : «Je me demande si, d'une certaine façon, les erreurs de Ramanujan ne furent pas plus merveilleuses encore que ses triomphes».

Godfrey Hardy (1877-1947).

Ramanujan est mort à un peu plus de 30 ans d'une tuberculose, sans doute contractée lors d'un de ses séjours dans l'humide Angleterre, qu'aggrava la stricte observance des règles d'alimentation végétarienne qu'il s'imposait pour tenir une promesse faite à ses parents.

On n'ose pas imaginer ce qu'auraient été ses découvertes s'il avait vécu plus longtemps, ou même s'il avait travaillé dans de bonnes conditions durant sa courte vie : il y a fort à parier que le monde mathématique actuel ne serait pas tout à fait ce qu'il est. Son génie se manifesta très tôt : on raconte qu'ayant à peine commencé l'étude de la trigonométrie, il découvre les relations entre cosinus, sinus et exponentielle, et se montre désappointé lorsqu'il apprend, en consultant le second tome du livre qu'il étudie, qu'elles sont connues depuis Euler.

L'ouvrage de mathématiques qui eut une influence décisive sur Ramanujan est le *Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics*, de G.S. Carr. Ce livre était une sorte de formulaire contenant l'énoncé de 6 165 théorèmes, rarement accompagnés de leurs démonstrations. Selon Hardy, il est évident que le style et les méthodes de présentation que Ramanujan adopte pour rédiger ses résultats s'inspirent directement du livre de Carr, ce qui explique l'absence – désolante – de démonstrations dans ses notes.

Trop absorbé par les mathématiques que son esprit découvre et reconstruit à la vitesse de la lumière, Ramanujan échoue dans ses études, perd la bourse qu'il a obtenue et rate en 1907 l'examen final du collège (une sorte de baccalauréat) qu'il passe en candidat libre.

À cette époque, isolé et pauvre, il est quelque temps commis dans l'agence portuaire de Madras. En 1913, il écrit à Hardy une lettre contenant 120 énoncés mathématiques. En lisant ces formules extraordinaires (certaines avaient déjà été trouvées, d'autres non), Hardy reconnaît immédiatement que ce ne peut être ni l'œuvre d'un farfelu, ni celle d'un fou. Il réussit à faire venir Ramanujan en Angleterre, l'accueille et travaille avec lui pendant plusieurs années. En 1918, Ramanujan devient membre de la Royal Society et du Trinity College, mais il meurt deux ans plus tard.

Les lacunes de sa formation conduisent à penser que Ramanujan ne possédait pas une idée très claire de ce qu'est une démonstration. C'est ainsi que Littlewood, un autre mathématicien qui l'a connu en Angleterre, explique que «si un bout signifiant de raisonnement lui venait à l'esprit et que, globalement, le mélange entre intuition et évidence lui donnait quelque certitude, il n'allait pas plus loin».

Les formules que Ramanujan proposa pour π paraissent merveilleuses. Certaines, à la lumière de constructions théoriques complexes proposées ultérieurement, sont aujourd'hui bien comprises et ont conduit à de nouveaux algorithmes ultra-rapides de calcul de π. D'autres restent mystérieuses, même pour les spécialistes qui s'interrogent sur la façon dont Ramanujan les a obtenues.

Voici une formule étonnante, dont on se demande si elle ne résulte pas seulement d'un jeu (mais qui peut jouer à de tels jeux ?) :

$$\left(102-\frac{2\,222}{22^2}\right)^{1/4}=3{,}14159265258$$

En 1985, William Gosper calcula 17 millions de décimales de π en utilisant une autre formule de Ramanujan. Au moment du calcul, elle n'était pas démontrée (elle l'a été depuis) ; aussi ne pouvait-il être certain que son calcul était juste, et que ce qu'il calculait était bien π. Cependant l'exactitude des premiers millions de décimales – que W. Gosper compara avec des calculs faits antérieurement – impliquait que la formule était bonne (sa fausseté aurait entraîné une discordance sur le morceau déjà connu). Le calcul de W. Gosper constituait donc une preuve de la formule de Ramanujan ; or il aurait coûté des millions d'heures de travail s'il avait été mené par des humains. Il est certain que Ramanujan n'avait pas fait de tels calculs. Comment procédait-il ?

Le progrès des formules pour arriver au milliard

La deuxième explication au fait qu'on soit arrivé plus rapidement que prévu au milliard de décimales est la découverte de méthodes dont la convergence est faramineuse. Parmi ces méthodes, on trouve d'une part des séries d'apparence complexe, et d'autre part des algorithmes itératifs qui ne peuvent pas s'écrire naturellement sous forme de séries.

(a) Nouvelles formules de séries : Ramanujan, Chudnovsky

La formule suivante fut découverte vers 1910 par Ramanujan, puis publiée en 1914 :

$$\pi = \frac{9\,801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1\,103+26\,390\,n)}{(n\,!)^4\,396^{4n}}\right)^{-1}$$

Avec cette formule, chaque terme supplémentaire donne huit décimales exactes nouvelles.

$R(0)$ = 3,141592730013305660313996189025215518600
$R(1)$ = 3,141592653589793877998905826306013094218
$R(2)$ = 3,141592653589793238462649065702758898156
$R(3)$ = 3,141592653589793238462643383279555273161
$R(4)$ = 3,141592653589793238462643383279502884197

Comme à son habitude, Ramanujan ne donna pas de démonstration de sa formule. Celle-ci parut pour la première fois en 1987 dans le livre de Jonathan et Peter Borwein, qui détaille et éclaire le travail de Ramanujan sur les équations modulaires. C'est avec elle qu'en 1985, W. Gosper calcula 17 millions de décimales de π.

La formule suivante a été élaborée dans le même esprit que la formule de Ramanujan et utilisée en 1994 par les frères Chudnovsky pour calculer quatre milliards de décimales de π :

$$\pi = \left(12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(6k)!\,(13\,591\,409+545\,140\,134\,k)}{(3k!)\,(k!)^3\,640\,320^{3k+3/2}}\right)^{-1}$$

$RC(0)$ = 3,141592653589734207668453591578298340762233260915
$RC(1)$ = 3,141592653589793238462643383587350688475866345996
$RC(2)$ = 3,141592653589793238462643383279502884197167678854
$RC(3)$ = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375

Cette formule donne 14 chiffres supplémentaires exacts à chaque nouveau terme. La suivante, proposée en 1989 par les frères Borwein, donne 25 décimales exactes supplémentaires par terme calculé :

$$\pi = \left(12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (A + kB)}{(3k!) (k!)^3 C^{k+1/2}} \right)^{-1}$$

avec : $A = 212\,175\,710\,912 \times \sqrt{61} + 1\,657\,145\,277\,365$
$B = 13\,773\,980\,892\,672 \times \sqrt{61} + 107\,578\,229\,802\,750$
$C = [5\,280 \times (236\,674 + 30\,303 \times \sqrt{61})]^3$

(b) Gauss, Salamin, Brent, Borwein

Les formules précédentes, et bien d'autres de Ramanujan, sont certes d'une efficacité supérieure à toutes celles connues auparavant, mais elles ont le défaut que le travail requis pour gagner quelques décimales de plus augmente sensiblement avec le nombre de décimales (même en utilisant des méthodes de multiplication rapide), car le nombre de termes à prendre en compte augmente, ainsi que le nombre de décimales avec lequel on doit calculer chaque terme, et cela dès le début.

Bien qu'il soit possible de freiner cette augmentation grâce à des techniques avancées de regroupement de termes et à la réutilisation astucieuse de calculs déjà faits, on a tendance à abandonner les formules de séries.

Le calcul de π par les méthodes des pages suivantes, mises au point au cours des 20 dernières années, se fait en répétant certaines manipulations organisées sur des nombres. Ces *algorithmes* construisent simultanément plusieurs suites de nombres, dont l'une donne des approximations de plus en plus fines de π.

La méthode d'Archimède peut être interprétée comme un calcul de ce type, mais sa convergence vers π est une convergence linéaire (gain d'un nombre fixe de décimales à chaque pas d'itération).

Les nouvelles formules donnent un nombre de décimales exactes supplémentaires qui augmente à chaque pas d'itération. Certaines formules doublent ce nombre à chaque étape, d'autres le triplent, et d'autres sont plus efficaces encore.

Les calculs à mener pour effectuer une étape comprennent des opérations de multiplication, de division et d'extraction de racine carrée, mais cela ne constitue pas un obstacle puisque, comme nous l'avons vu, chacune de ces opérations se ramène à quelques multiplications (à peu près cinq pour la division, à peu près sept pour l'extraction de racine carrée), et que la multiplication entre grands nombres peut s'effectuer efficacement.

Au total, avec ces nouvelles méthodes de calcul, obtenir n décimales de π ne demande plus qu'un travail à peu près proportionnel à n. Plus précisément, si l'on utilise un algorithme de multiplication de complexité $M(n)$, alors les méthodes décrites dans ce paragraphe conduisent à un calcul de n décimales de π en un temps proportionnel à $\ln(n) \times M(n)$. Avec les séries, le mieux que l'on pouvait espérer en s'y prenant bien était $(\ln(n))^2 \times M(n)$. Puisque les algorithmes de multiplication les plus rapides que l'on connaisse calculent le produit de deux entiers de taille n en un temps proportionnel à $n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n))$, on obtient en théorie, en les employant avec les nouvelles méthodes, des algorithmes de calcul de π donnant n décimales en un temps proportionnel à :

$$n \times (\ln(n))^2 \times \ln(\ln(n))$$

En réalité, même dans les algorithmes à convergence rapide, les algorithmes de multiplication utilisés ne sont pas les meilleurs du point de vue théorique, pour des raisons de simplicité (et parce que des algorithmes de moindre efficacité suffisent pour des données de la taille de celles traitées aujourd'hui). On utilise les méthodes décrites dans l'annexe, fondées sur la transformée de Fourier rapide, et qui sont susceptibles de légers perfectionnements. Il en résulte qu'aujourd'hui les algorithmes de calcul de π effectivement programmés travaillent en temps proportionnel à : $n \times (\ln(n))^4$ (ou un petit peu moins).

Cette convergence quasi linéaire (le terme $(\ln(n))^4$ augmente peu avec n, et de plus en plus lentement) signifie qu'avec les algorithmes actuels, un doublement des capacités de calcul des machines conduira à peu près à un doublement du nombre de décimales calculées.

La première formule à convergence rapide vers π a été découverte en 1973, et publiée simultanément et indépendamment en 1976 par Eugène Salamin et Richard Brent. Ce nouvel algorithme, fondé sur la moyenne arithmético-géométrique, doit être rattaché à des travaux faits par Carl Friedrich Gauss au début du XIXe siècle (mais Gauss n'eut pas conscience de l'intérêt de son travail pour le calcul de π). Le voici :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1 & b_0 = 1/\sqrt{2} & s_0 = 1/2, \\ a_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2 & b_k = \sqrt{(a_{k-1}b_{k-1})} & c_k = a_k^2 - b_k^2 \\ s_k = s_{k-1} - 2^k c_k & p_k = 2a_k^2/s_k & \end{array}$$

Pour utiliser un tel algorithme, on commence par initialiser a_0, b_0, s_0 (utilisation de la première ligne) puis, en prenant les formules des lignes 2 et 3, on calcule successivement a_1, b_1, c_1, s_1, p_1, puis a_2, b_2, c_2, s_2, p_2, etc. Les nombres $p_1, p_2, \ldots$ sont des approximations de plus en plus fines de π. Pour économiser du temps, on peut ne calculer que le dernier des p_i, car les autres p_i ne servent pas au déroulement des calculs. On reconnaît, à la ligne 2 de l'algorithme, des calculs de moyenne arithmétique et de moyenne géométrique.

Les p_k convergent quadratiquement vers π : le nombre de décimales exactes obtenu double à chaque itération. Avec 25 itérations, on obtient 45 millions de décimales exactes (à condition bien sûr d'avoir calculé dès le départ avec 45 millions de décimales, ce qui n'est pas si simple !). Voici le résultat des premières itérations :


Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Jonathan et Peter Borwein.

p_1 = 3,18767264271210862720192997052536923265O
p_2 = 3,141680293297653293918070424560009382790
p_3 = 3,141592653895446496002914758818043486112
p_4 = 3,141592653589793238466360602706631321770
p_5 = 3,141592653589793238462643383279502884278

Des algorithmes à convergence d'ordre 3 (triplement du nombre de décimales exactes à chaque itération supplémentaire), d'ordre 4 et même d'ordre 9 ont depuis été proposés par J. et P. Borwein. La théorie de ces algorithmes est liée aux travaux de Ramanujan sur les identités modulaires. Le lecteur intéressé trouvera un développement détaillé de cette théorie dans l'excellent livre des frères Borwein paru en 1987, entièrement consacré au sujet.

Voici un algorithme d'ordre 4 dû aux frères Borwein :

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2} \qquad y_0 = \sqrt{2} - 1$$
$$y_{k+1} = [1 - (1 - y_k{}^4)^{1/4}] \,/\, [1 + (1 - y_k{}^4)^{1/4}]$$
$$a_{k+1} = a_k(1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1}(1 + y_{k+1} + y_{k+1}{}^2) \qquad p_k = a_k{}^{-1}$$

p_1 = 3,1415926462135422821493444319826957743144372233456O
27945595394848214347672207952646946434489179913058
79164621705535188442692995943470362111923739681179
958736576363907084342931450942394899921183673.....

p_2 = 3,14159265358979323846264338327950288419711467828364
89215566171069760267645006430617110065777265980684
36361664148276914164854540707191940164831544617739
166893511386204382279400639745469316981567510.....

p_3 = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679
82148086513282306647093844609550582231725359408128
481117450284102701936212524844710232682133609.....

La seizième itération donnerait plus de dix millions de décimales exactes (en calculant dès le début avec dix millions de décimales...).

Récemment, les frères Borwein ont prouvé qu'il existait des algorithmes d'ordre m pour tout m. Toutefois il n'est pas certain que des algorithmes d'ordre élevé soient vraiment utiles : quand m augmente, la suite p_k converge plus vite, mais la complexité des calculs nécessaires pour avancer d'une itération est plus importante : seule l'expérience permet de conclure, et elle semble pour l'instant indiquer que l'algorithme quartique (d'ordre 4) indiqué ci-dessus est le meilleur.

Précisons que tout dépend de l'implémentation détaillée. Par conséquent, on ne peut établir aucun résultat définitif qui désigne dans l'absolu la meilleure méthode. Le temps d'exécution d'un calcul dépend d'un grand nombre de facteurs (en plus des algorithmes choisis) : structure de l'ordinateur (séquentielle, parallèle, vectorielle), de la mémoire (taille de la mémoire rapide disponible, taille des mots, temps des copies), langages utilisés, qualité des compilateurs, etc.

Pour terminer ce paragraphe, voici un algorithme nonique (d'ordre neuf) tiré d'une méthode générale pour engendrer des formules de calcul de π que J. Borwein et F. Garvan ont récemment mise au point en s'aidant de systèmes de calcul formel :

$$a_0 = 1/3 \qquad r_0 = (\sqrt{3} - 1)/2 \qquad s_0 = (1 - r_0^{\,3})^{1/3}$$
$$t = 1 + 2r_k \qquad u = [9r_k(1 + r_k + r_k^{\,2})]^{1/3}$$
$$v = t^2 + tu + u^2 \qquad m = 27(1 + s_k + s_k^{\,2})/v$$
$$a_{k+1} = ma_k + 3^{2k-1}(1 - m) \qquad s_{k+1} = (1 - r_k)^3/(t + 2u)v$$
$$r_{k+1} = (1 - s_k^{\,3})^{1/3} \qquad p_{k+1} = 1/a_{k+1}$$

Les records de 1973 à aujourd'hui

Voici le tableau des récents records *(page 194, un tableau complet récapitule les records commentés dans les chapitres précédents)* :

Guilloud et Bouyer	1973	1 001 250
Miyoshi et Kanada	1981	2 000 036
Guilloud	1982	2 000 050
Tamura	1982	2 097 144
Tamura et Kanada	1982	4 194 288
Tamura et Kanada	1982	8 388 576
Kanada, Yoshino et Tamura	1982	16 777 206
Ushiro et Kanada	10-1983	10 013 395
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	01-1986	29 360 111
Kanada et Tamura	09-1986	33 554 414
Kanada et Tamura	10-1986	67 108 839
Kanada, Tamura, Kobo et al.	01-1987	134 217 700
Kanada et Tamura	01-1988	201 326 551
Chudnovsky	05-1989	480 000 000
Kanada et Tamura	07-1989	536 870 898
Chudnovsky	08-1989	1 011 196 691
Kanada et Tamura	11-1989	1 073 741 799
Chudnovsky	08-1991	2 260 000 000
Chudnovsky	05-1994	4 044 000 000
Takahashi et Kanada	06-1995	3 221 225 466
Kanada	08-1995	4 294 967 286
Kanada	10-1995	6 442 450 938
Kanada et Takahashi	07-1997	51 539 600 000

Détaillons les grandes étapes de cette course aux décimales :

• Le calcul de 17 millions de décimales par William Gosper en 1985.

Comme on l'a vu dans le paragraphe consacré à Ramanujan, W. Gosper, en utilisant une formule du génial Indien, contribua à la prouver. Il calcula son résultat à la fois sous la forme d'une fraction continue et d'une expression en base dix.

W. Gosper utilisa une machine dont l'architecture avait été spécialement conçue pour effectuer de longs calculs symboliques avec efficacité (principalement en vue d'applications en Intelligence artificielle) ; c'était une création de la société *Symbolics*, installée en Californie.

• Le calcul de 29 millions de décimales par David Bailey en janvier 1986

Le record de D. Bailey est assez bien documenté. Voici quelques précisions intéressantes sur ce calcul.

D. Bailey présenta son calcul comme une sorte de test, utilisé pour s'assurer du bon fonctionnement du système d'ordinateurs vectoriels très puissants construit autour de plusieurs ordinateurs *Cray-2* au Centre de recherches *Ames* de la NASA. Une erreur aurait même été détectée grâce à ce calcul.

Le calcul a été fait deux fois. Une première fois le 7 janvier 1986, avec l'algorithme quartique des frères Borwein. L'algorithme a été «itéré» treize fois. Le calcul des 29 360 000 décimales occupa une unité centrale du *Cray-2* pendant 28 heures. Il y eut 12 000 milliards d'opérations arithmétiques effectuées, et 138 millions de mots de la mémoire centrale furent utilisés.

La vérification par un second calcul indépendant fut faite avec un algorithme quadratique, dû également aux frères Borwein. Cet algorithme fut itéré 24 fois, ce qui occupa 40 heures de processeur et réquisitionna 147 millions de mots de la mémoire centrale.

Les calculs furent menés en base 10^7 (de manière à éviter une opération de conversion longue et risquée). Tous les calculs furent vectorisés, c'est-à-dire décomposés en opérations élémentaires effectuées en parallèle, ce que la conception de base des ordinateurs *Cray* permet. Pour le problème du traitement des retenues finales *(voir l'idée 1 de l'annexe page 124)*, le calcul était également vectorisé.

La multiplication rapide mise en œuvre par D. Bailey était fondée sur la technique de la transformée de Fourier rapide, avec des racines primitives de l'unité choisies dans un corps fini (en fait, dans deux corps finis différents, avec recomposition des résultats obtenus dans chacun des corps, voir l'annexe). D. Bailey n'avait pas retenu la méthode des racines primitives complexes, car elle aurait obligé à utiliser des opérations en nombres réels : dans un calcul aussi long, on cumule les erreurs d'arrondi qui sont finalement fatales. La méthode des corps finis n'a pas ce défaut, car elle conduit à ne manipuler que des nombres entiers.

Ce serait une erreur de croire qu'un tel calcul est à la portée de tout le monde. Non seulement il faut disposer de machines puissantes, mais il faut aussi soigneusement choisir et évaluer les méthodes que l'on programme. En outre, il faut écrire les programmes très finement, en tenant compte des particularités les plus techniques de la machine. Au moment où il est réalisé, ce type d'exploit est à la limite de ce qui est faisable, si bien que même dix ou vingt ans après, il reste hors de portée des ordinateurs et des utilisateurs ordinaires.


Gregory et David Chudnovsky.

• Les frères Chudnovsky, qui arrivèrent les premiers au milliard

Pour leurs calculs, Gregory et David Chudnovsky ont utilisé des formules de séries, analogues à celles de Ramanujan, qu'ils ont eux-mêmes élaborées. Ces formules sont d'ordre 1, mais ils les programment avec un soin particulier et des méthodes arithmétiques qu'on ne connaît pas très bien (peut-être fondées sur des généralisations et des perfectionnements des idées de l'algorithme compte-gouttes).

Depuis dix ans, ils disputent le titre de champion du calcul de π à l'équipe de l'Université de Tokyo, dirigée par Yasumasa Kanada, bien qu'ils disposent de moyens matériels bien inférieurs. Les frères Chudnovsky furent les premiers à atteindre le milliard de décimales en 1989, et à atteindre quatre milliards en 1994.

On ne dispose pas d'informations très précises sur leurs calculs. En revanche, leur histoire personnelle, racontée par Richard Preston, semble sortie d'un roman ; elle est si extraordinaire qu'elle mérite qu'on s'y arrête.

Les frères Chudnovsky sont d'origine ukrainienne. Ils firent leurs études à Kiev et passèrent leur thèse de mathématiques à l'Institut de mathématiques de l'Académie d'Ukraine. Ils ont fui l'URSS dès que cela leur a été possible, en 1977, après une série d'ennuis graves avec le KGB quand ils eurent fait connaître leur désir de partir. Ils séjournèrent quelques mois en France et s'installèrent à New York. Ils sont aujourd'hui citoyens américains.

Ce sont tous deux des mathématiciens de premier ordre, reconnus mondialement pour leurs travaux en théorie des nombres. Gregory est considéré par certains comme un génie exceptionnel, comparable aux plus grands par l'étendue de son savoir et de sa compréhension mathématique.

Dès l'âge de 16 ans, Gregory fit d'ailleurs une découverte majeure : il résolut le dixième problème de Hilbert, l'une des 23 énigmes mathématiques que David Hilbert énuméra au Congrès international de Paris de 1900. Malheureusement, peu de temps auparavant, un autre mathématicien de l'Est, Yuri Matiasevich (lui aussi émigré depuis), avait résolu ce célèbre problème en établissant l'indécidabilité des équations diophantiennes. Y. Matiasevich aurait récemment reconnu que la méthode de Gregory Chudnovsky était meilleure que la sienne. Une multitude d'autres travaux a depuis confirmé le talent de Gregory.

Richard Askey, mathématicien de l'Université du Wisconsin qui a travaillé avec les Chudnovsky, dit que Gregory lui est tellement supérieur qu'il ne peut même pas savoir s'il est aujourd'hui le meilleur au monde ou seulement parmi les trois meilleurs. Gregory a reçu toutes sortes de récompenses et de prix. Par exemple, il a obtenu deux fois des prix de la Fondation Guggenheim ; la Fondation John et Catherine MacArthur lui attribua son prix dès sa création en 1981, comme si ce prix avait été créé pour lui.

Les deux frères Chudnovsky sont installés dans un appartement de New York qui est devenu le centre de calcul le plus fantastique du monde. Il y règne un désordre incroyable de livres, de photocopies et d'ordinateurs. Une chaleur intense se dégage des multiples appareils qui y fonctionnent nuit et jour : on dit que leur appartement est chauffé aux microprocesseurs. Gregory, victime d'une grave maladie auto-immune des muscles dont il souffre depuis l'enfance, se déplace très difficilement et doit rester dans son lit, coincé entre des coussins la plus grande partie de la journée, au milieu d'une montagne de documents et avec un clavier d'ordinateur sur les genoux.

Les Chudnovsky sont membres du département de mathématiques de l'Université de Columbia, toute proche de leur appartement ; ils n'y ont pas vraiment de fonction rémunérée parce que la maladie de Gregory l'empêche d'enseigner, et que David ne veut accepter de poste qu'associé à son frère.

Le matériel installé, si l'on peut dire, dans l'appartement des Chudnovsky, a été acheté par eux et leur famille, ou provient de récupérations et de dons divers. Le superordinateur qui leur a permis de s'emparer plusieurs fois du record de calcul de π, baptisé *m-zéro*, est structuré selon une architecture qu'ils ont conçue eux-mêmes et sur laquelle on a peu de détails. Il leur est arrivé d'utiliser des machines d'autres centres de calcul auxquels ils sont reliés par le réseau *Internet*.

Leur cas est réellement extraordinaire ; avant de lire leur histoire, j'étais persuadé que la recherche isolée, sans soutien, dans un domaine aussi compétitif que le calcul de π ne pouvait rien donner. Ils embarrassent la communauté scientifique américaine, qui n'a pas su vraiment les accueillir ni leur proposer de situations stables. Certains mathématiciens, tel Herbert Robbins, professeur à l'Université de Columbia, ont tenté d'alerter leur collègues sur ce cas unique de mathématiciens que tout le monde s'accorde à trouver exceptionnels, mais qu'aucune institution ne semble disposée à accueillir. Il est effrayant de penser que Gregory, de santé très fragile, pourrait disparaître sans avoir pu communiquer à quelque brillant élève la perception unique qu'il s'est forgé des mathématiques. Pour l'instant, leur situation semble bloquée.

Le désir des Chudnovsky de calculer π est lié à l'idée que ses décimales s'organisent probablement selon une certaine structure, ou présentent au moins des régularités qu'il est important de découvrir. Le fait que les chiffres de π sont à la fois aléatoires – selon tous les tests statistiques auxquels on les soumet – et en même temps parfaitement déterminés – puisque ce sont les décimales de π – les intrigue profondément et leur apparaît comme un paradoxe devant être éclairci *(nous reparlerons de ce problème au chapitre 10).*

Gregory Chudnovsky dit d'ailleurs très clairement : «Nous sommes à la recherche de l'effet des règles qui distinguent π des autres nombres. C'est comme lorsqu'on étudie un écrivain en scrutant son vocabulaire et sa syntaxe. Nous ne cherchons pas de motif, nous cherchons des règles. Pourquoi π apparaît-il totalement imprédictible et pourquoi semble-t-il si complexe ? Nous avons besoin de découvrir ce qui fixe ce jeu.»

Certains mathématiciens désapprouvent totalement cette quête des décimales que les deux frères mènent avec acharnement. L'un de ces mathématiciens dit qu'il est préférable de rechercher là où il semble y avoir quelque chose à trouver et que, dans le cas de π, tout semble perdu d'avance. Peut-être est-ce perdu d'avance pour les mathématiciens ordinaires, dont l'ambition se limite à développer sagement les thèmes qui marchent bien. Seuls les génies assez sûrs d'eux, tels que Gregory Chudnovsky, peuvent se permettre de partir à l'assaut d'objectifs considérés comme illusoires par les autres.

Leur travail prouve au moins une chose, c'est que l'on peut être un mathématicien de premier rang et juger intéressant, voire crucial, de calculer les décimales de π. Cet exemple devrait ôter leurs complexes à tous ceux qui sont honteux de chasser les décimales de π et qui, craignant que l'on se moque d'eux, usent de mauvais prétextes pour s'adonner à leur passion.

• Le champion à répétition : Yasumasa Kanada

Le cas de Y. Kanada, de l'Université de Tokyo, est également remarquable puisque ce Japonais participe à cette compétition depuis maintenant plus de quinze ans, et en occupe la première place plus de la moitié du temps, avec des collaborateurs divers.

Y. Kanada utilise les formules à convergence d'ordre 2 et 4 indiquées précédemment, dues entre autres aux frères Borwein. Il a atteint 51 milliards de décimales en juillet 1997 (29 heures pour un premier calcul avec l'algorithme d'ordre 4, et 37 heures pour un calcul de vérification avec l'algorithme d'ordre 2).

Yasumasa Kanada au Centre de calcul de l'Université de Tokyo.

Y. Kanada utilise bien sûr les techniques de transformation de Fourier rapide et, comme D. Bailey, calcule en base dix (ou 10^k) pour éviter une conversion à la fin du calcul.

Y. Kanada a d'abord utilisé des ordinateurs *NEC*, mais il travaille aujourd'hui avec des ordinateurs *Hitachi*, et la machine dont il dispose (*HITACHI SR2201*) est l'une des plus puissantes au monde ; c'est une machine massivement parallèle qui utilise 1 024 processeurs.

On raconte que, pour s'amuser, il aurait récemment calculé 137 milliards de décimales de $\sqrt{2}$ en 7 heures 30, soit cinq millions de décimales à la seconde.

Annexe 1 : la transformée de Fourier rapide pour multiplier

La multiplication rapide par la transformée de Fourier discrète, qui est la méthode retenue dans tous les calculs récents de π, repose sur quelques idées simples que nous allons examiner individuellement avant de les combiner.

Idée 1 : la multiplication entre deux nombres peut se ramener à une multiplication entre deux polynômes, suivie d'un report de retenues.

Tout nombre peut s'écrire comme une somme de puissances de 10, ou de 10^p, et plus généralement, lorsqu'on travaille dans une base a autre que 10, comme une somme de puissances de a (ceci n'est rien d'autre que le principe de la numération de position dans la base a).

Par exemple,

$$4\,762\,846 = 6 + 4 \times 10 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 6 \times 10^4 + 7 \times 10^5 + 4 \times 10^6$$
$$4\,762\,846 = 46 + 28 \times 10^2 + 76 \times 10^4 + 4 \times 10^6$$

Pour multiplier deux tels nombres, on peut les écrire sous forme de polynômes en remplaçant les 10^i par des X^i :

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n)\,(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots + b_n X^n)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + \ldots. + (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) X^{2n-1} + a_n b_n X^{2n},$$

et ne repasser aux entiers qu'à la fin (ce qui revient à repousser au dernier moment le traitement des retenues, comme cela est expliqué page 101). Pour la multiplication de 123 par 245, cette méthode donne :

$$\begin{aligned}
123 \times 245 &= (3 + 2X + X^2)\,(5 + 4X + 2X^2)\\
&= 15 + (12 + 10)X + (6 + 8 + 5)X^2 + (4 + 4)X^3 + 2X^4\\
&= 15 + 22X + 19X^2 + 8X^3 + 2X^4\\
&= 15 + 22 \times 10 + 19 \times 10^2 + 8 \times 10^3 + 2 \times 10^4\\
&= 5 + 3 \times 10 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^3 + 3 \times 10^4 \textit{ (en traitant les retenues)}\\
&= 30\,135
\end{aligned}$$

Jean-Baptiste Fourier (1768-1830).

Le travail de transformation d'un nombre en polynôme, et celui de transformation d'un polynôme en nombre, sont à peu près proportionnels à la taille des nombres traités. Il en résulte que, pour faire rapidement des multiplications de nombres, il suffit de savoir faire rapidement des multiplications de polynômes.

Remarquons aussi qu'en pratique, la phase finale du traitement des retenues peut être effectuée en parallèle : plutôt que de partir de la gauche et de reporter les retenues en allant pas à pas vers la droite, on préfère traiter toutes les retenues simultanément (on dit qu'on *vectorise*), ce qui peut créer de nouvelles retenues qu'on traite de nouveau simultanément, etc. jusqu'à ce que plus aucune nouvelle retenue ne soit créée.

Idée 2 : quand on connaît un polynôme de degré n en $(n + 1)$ points, on peut connaître complètement ce polynôme (cela s'appelle l'interpolation).

Par exemple, sachant que le polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ est tel que $P(0) = 4$, $P(1) = 8$, $P(-1) = 2$, on en déduit le système d'équations :

$$\begin{array}{lcl} 4 = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 & & 4 = a_0 \\ 8 = a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 & \text{ou encore} & 8 = a_0 + a_1 + a_2 \\ 2 = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 & & 2 = a_0 - a_1 + a_2 \end{array}$$

On a : $a_0 = 4$, $(a_1 + a_2) = 4$, $(a_1 - a_2) = 2$, ce qui donne $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ et : $P(X) = 4 + 3X + X^2$.

Si l'on considère toujours les mêmes points d'évaluation (ce qui sera le cas plus loin), alors la matrice du système qu'on résout est toujours la même et peut donc être étudiée à l'avance. La résolution du système peut, dans de tels cas, être programmée une fois pour toutes.

Idée 3 : pour évaluer le produit de deux polynômes en un point, il suffit d'évaluer chaque polynôme en ce point, puis de multiplier les résultats ; pour évaluer un produit de polynômes en $(n + 1)$ points, il suffit donc de faire $2(n + 1)$ évaluations de polynômes suivies de $(n + 1)$ multiplications élémentaires.

Cela résulte de la définition d'un produit $[PQ]$ de polynômes, $[PQ](x) = P(x)\,Q(x)$.

Idée 4 : l'évaluation d'un polynôme aux $(n + 1)$ premières puissances d'une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité est d'un coût en multiplications élémentaires, non pas proportionnel à n^2, mais à $n \times \ln(n)$ si on s'y prend bien. C'est là le point le plus délicat.

D'abord, qu'est-ce qu'une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité ? C'est un nombre x tel que $x^{n+1} = 1$ et tel que $x^i \neq 1$ pour $i = 1, 2, ..., n$ (x revient à 1 au bout de $(n + 1)$ multiplications avec lui-même, mais n'y revient pas avant).

Pour trouver de telles racines $(n + 1)$-ièmes de l'unité, il faut évidemment les rechercher en dehors des nombres réels car, parmi les nombres réels, seul -1 est racine deuxième de l'unité (on a en effet $(-1)^2 = 1$).

On trouve des racines $(n + 1)$-ièmes de l'unité parmi les nombres complexes : $e^{2i\pi/(n+1)}$ en est une. Quand $n = 3$, on a le nombre complexe $i = e^{i\pi/2}$, qui est une racine primitive quatrième de l'unité (on vérifie d'ailleurs que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$).

Pour trouver des racines de l'unité, on peut aussi utiliser les corps finis F_p des entiers modulo p, avec p un nombre premier. L'idée des calculs dans ces corps consiste à ne retenir que le reste (quand on divise par p) des nombres considérés : dans F_5, par exemple, on a $3 + 3 = 6 = 1$; $3 \times 4 = 12 = 2$, etc. Dans les F_p, on trouve facilement des racines primitives de l'unité. Ainsi, dans F_5, $3^2 = 9 = 4$, $3^3 = 27 = 2$, $3^4 = 81 = 1$: 3 est donc une racine primitive quatrième de l'unité. (Les corps finis ont l'avantage sur les nombres complexes de ne conduire qu'à des calculs entre entiers. Toutefois, en pratique, on utilise les deux méthodes.)

Normalement, quand on évalue un polynôme de degré n en un point x, on doit faire n multiplications élémentaires au moins, et encore en utilisant la méthode de Horner : pour connaître $P(3)$ quand $P(X) = 4 + 3X + 12X^2 + 4X^3$, on écrit $P(X) = 4 + X(3 + X(12 + 4X))$, ce qui conduit à faire trois multiplications.

Pour évaluer un polynôme en $(n + 1)$ points différents, la méthode naturelle (évaluer en chacun des points en les prenant les uns après les autres et en utilisant la méthode de Horner) conduit à effectuer environ $(n + 1)^2$ multiplications élémentaires.

Or, quand il s'agit d'évaluer aux $(n + 1)$ puissances d'une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité, et que $n + 1 = 2^m$ (ce que l'on supposera, car on peut toujours se ramener à un tel cas), il existe une astuce du même genre que celle de A. Karatsuba pour la multiplication, qui économise du calcul. Cette astuce d'évaluation est à la base du succès de la transformation de Fourier rapide (c'est le cœur de toute la méthode). La voici. Soit un polynôme à évaluer :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Posons : $$Q(x^2) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$x\,R(x^2) = x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \ldots + a_nx^{n-1})$$

En posant $y = x^2$, on a : $P(x) = xR(y) + Q(y)$

Puisque x est une racine $(n + 1)$-ième de l'unité, on a $x^{n+1} = 1$, d'où :

$$(x^i)^2 = (x^{(n+1)/2+i})^2 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, (n + 1)/2$$

Par conséquent, évaluer $P(x)$ aux $(n + 1)$-racines de l'unité $1, x, x^2, \ldots, x^n$ se réduit à évaluer R et Q aux $(n + 1)/2$ points $(x^2)^1, (x^2)^2, \ldots, (x^2)^{(n+1)/2}$, et à combiner les résultats (ce qui ne demande qu'une addition et une multiplication supplémentaires).

On n'a plus ainsi qu'à évaluer deux polynômes de degré $(n + 1)/2$ en $(n + 1)/2$ points.

Si on utilisait à présent la méthode naturelle d'évaluation pour P et Q, on aurait fait au total deux fois moins de travail que si on l'avait utilisée dès le début (car la méthode naturelle est en n^2, et $2((n + 1)/2)^2 = [(n + 1)^2]/2$).

Toutefois, plutôt que d'utiliser la méthode naturelle, on décompose une nouvelle fois P et Q, ce qui économise de nouveau la moitié du travail, et on répète le processus (comme nous avons supposé que $n + 1 = 2^m$, la division peut se poursuivre). Au terme de ces décompositions, on aura divisé m fois le travail par 2. En prenant en compte les opérations nécessaires pour combiner les résultats, on trouve un nombre de multiplications qui, au lieu d'être proportionnel à n^2, n'est plus proportionnel qu'à $n \times \ln(n)$, ce qui est considérablement moins quand n est grand : pour $n + 1 = 2^{10} \approx 1\,000$, n^2 vaut environ un million, alors que $n \times \ln(n)$ vaut 100 fois moins.

Idée 5 : le problème de l'interpolation d'un polynôme sur les $(n + 1)$ premières puissances d'une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité est lui aussi d'un coût en $n \times \ln(n)$.

L'idée est de ramener l'interpolation d'un polynôme sur les puissances d'une racine primitive de l'unité à une évaluation de polynôme aux puissances des racines primitives de l'unité *(idée 4)*. Cela n'est que le résultat d'un calcul matriciel élémentaire : interpoler en $1, x, x^2, ..., x^n$ (avec x racine $(n + 1)$-ième primitive de l'unité), c'est résoudre l'équation matricielle :

$$W X = A$$

où X est le vecteur $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$,
A est le vecteur des données (les valeurs d'interpolation),
W est la matrice $(w_{i,j})$, $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$,
dont le coefficient général est $w_{i,j} = x^{ij}$.

La matrice W est inversible (il existe une matrice W^{-1} telle que $W^{-1} A = X$), et on vérifie, en utilisant le fait que x est une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité, que $W^{-1} = (w'_{i,j})$, $i = 0, 1, ..., n$; $j = 0, 1, ..., n$, avec $w'_{i,j} = x^{-ij}/(n + 1)$.

On a donc $W^{-1} A = X$. Mais comme x^{-1} est aussi une racine primitive $(n + 1)$-ième de l'unité, on est ramené exactement au problème d'évaluation que l'idée 4 résolvait. En résumé, dans ce cas particulier, l'interpolation se ramène à une évaluation que l'on peut mener efficacement.

On nomme transformation de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* : FFT) le passage de X à A (la multiplication par W). Le passage de A à X (multiplication par W^{-1}) est la transformation de Fourier rapide inverse. Nous venons de voir que ces deux transformations sont de même nature (c'est-à-dire sont efficacement calculables), et se compensent l'une l'autre : $W W^{-1} A = A$.

Idée 6 : en utilisant des évaluations et des interpolations aux racines primitives de l'unité, on peut multiplier deux polynômes en utilisant un nombre de multiplications élémentaires proportionnel à $n \times \ln(n)$ (alors que la multiplication élémentaire par la formule de multiplication usuelle des polynômes conduit à faire n^2 multiplications élémentaires).

Il suffit de combiner les diverses idées vues précédemment :

Pour multiplier les polynômes, on va chercher à connaître le polynôme produit en $n + 1$ valeurs, puis on interpolera *(idée 2)*.

Pour connaître des valeurs du polynôme produit P_1P_2 en certains points, on va évaluer P_1 et P_2 en ces points, puis on multipliera les valeurs trouvées *(idée 3)*.

Cette évaluation de P_1 et P_2 se fait aux puissances $1, x, x^2, ..., x^n$, d'une racine $(n + 1)$-ième de l'unité x, ce qui donne des valeurs $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ pour P_1 et $p_0', p_1', p_2', ... p_n'$ pour P_2 au terme d'un travail proportionnel à $n \times \ln(n)$ *(idée 4)*.

On effectue alors les produits $q_0 = p_0 \times p_0'$, $q_1 = p_1 \times p_1'$, ..., $q_n = p_n \times p_n'$, ce qui est un travail proportionnel à n. On recherche enfin par interpolation le polynôme qui prend les valeurs $q_0, q_1, ..., q_n$ aux points $1, x, x^2, ..., x^n$, ce qui demande un travail proportionnel à $n \times \ln(n)$ *(idée 5)*.

On connaît alors le polynôme P_1P_2, ce que l'on voulait.

En définitive, pour multiplier les deux grands nombres N_1 et N_2, on les transforme en polynômes P_1 et P_2 et on est amené à multiplier les polynômes. Quand cela est fait, on transforme le polynôme résultant en nombre *(idée 1)*.

On trouvera plus de détails et d'autres applications de la transformation de Fourier discrète dans le livre des frères Borwein de 1987 (consacré au nombre π). Les liens avec l'analyse de Fourier, ainsi que des précisions historiques, sont donnés dans le livre de Barbara Burke Hubbard paru en 1995.

Le calcul isolé des chiffres de π

Une découverte issue des mathématiques expérimentales

La nouvelle formule de David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe offre l'extraordinaire possibilité de calculer n'importe quel chiffre de π en base 2 sans avoir à calculer les chiffres qui précèdent. Nous expliquons les conséquences théoriques et pratiques de cette découverte récente et inattendue.

Plus rien de nouveau sur π ?

En 1995, beaucoup pensaient qu'il n'y avait plus grand chose de spectaculaire à attendre des recherches sur π : sans doute continuerait-on à progresser dans le calcul des décimales, mais au rythme régulier du perfectionnement des machines, et non grâce à de nouvelles avancées mathématiques. Depuis des siècles que l'on s'intéresse à π, raisonnaient-ils, tout ou presque en était sans doute connu, et ce qui ne l'était pas resterait certainement hors de portée pour longtemps. La découverte d'une nouvelle formule pour π par une équipe canadienne de l'Université Simon Fraser, à Burnaby, en Colombie Britannique, et les conséquences de cette découverte, prouvent que des nouveautés étonnantes au sujet de π peuvent encore surgir aujourd'hui.

Progrès mathématiques et perfectionnement des machines

La myopie des prophètes de π est souvent amusante ; ainsi Petr Beckmann considérait en 1970, dans son livre sur l'histoire de π, qu'il n'y aurait plus rien de nouveau concernant ce nombre qui nous accompagne depuis 4 000 ans. Daniel Shanks, à qui l'on doit le premier calcul de 100 000 décimales de π en 1961, pensait quant à lui que l'on n'atteindrait *jamais* le milliard de décimales.

Or, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la découverte de nouveaux algorithmes de calcul de π et l'application des méthodes de multiplication rapide fondées sur la transformée de Fourier discrète ont donné, dès 1975, un coup d'accélérateur au calcul des décimales de π.

L'histoire de π l'avait déjà montré : les progrès mathématiques, essentiels pour aller plus loin dans le calcul et la connaissance de π, donnent un sens à cette course aux décimales et en sont finalement le moteur principal. Le progrès dont nous allons parler ici est d'une nature bien différente, et il est plus révolutionnaire encore que l'avènement des méthodes de multiplication rapide : il s'agit de la découverte d'une formule qui permet de calculer des chiffres binaires de π à des positions très lointaines *sans que l'on ait à calculer les chiffres qui précèdent*. Selon Stan Wagon, qui s'intéresse au problème depuis de nombreuses années et qui inventa il y a trois ans, avec Victor Adamchik, les algorithmes compte-gouttes pour le calcul de π *(voir le chapitre 6)*, ce nouveau progrès constitue un changement de direction radical dans le cours d'une histoire aussi ancienne que celle des mathématiques.

Les évidences de l'intuition mathématique

Il y a encore quelques mois, un mathématicien que vous auriez interrogé sur la possibilité de sauter au dix-milliardième chiffre binaire de π sans calculer les précédents vous aurait ri au nez. Les mathématiciens sont parfois persuadés, sans véritable preuve mais en s'appuyant sur leur fameuse et trop commode intuition, de certaines impossibilités qu'un illuminé, ou simplement un mathématicien génial et sans complexes, vient balayer d'un revers de main. En 1989, les deux frères Borwein, grands spécialistes des méthodes de calcul de π *(voir le chapitre 7)*, jugeaient ainsi «... raisonnable de spéculer que calculer le n-ième digit *(chiffre binaire)* de π n'est pas vraiment plus facile que calculer tous les digits jusqu'au n-ième.» Il est amusant que l'un des frères Borwein appartienne à l'équipe qui a démenti ce jugement six ans plus tard !

Une surprise analogue fut créée, en 1934, par la démonstration que a^b est un nombre transcendant (c'est-à-dire n'étant solution d'aucune équation algébrique) si a est algébrique, différent de 0 et de 1, et b algébrique et irrationnel *(voir le chapitre 9)*. Le grand David Hilbert considérait en 1900 que ce problème était nettement plus difficile que la conjecture de Riemann (une hypothèse sur la répartition des nombres premiers) ; or la conjecture de Riemann attend toujours d'être démontrée.

Une formule radicalement nouvelle

La découverte de la nouvelle formule est datée avec une grande précision (sans doute grâce aux sauvegardes des fichiers informatiques contenant les traces des calculs qui ont conduit à son élaboration) : le 19 septembre 1995, à 0h29. Pour le découvreur, Simon Plouffe, cette nuit couronnait un mois de recherches, menées avec David Bailey et Peter Borwein à l'Université Simon Fraser. En s'aidant du programme de calcul formel PSLQ, mais pleinement conscient de ce qu'il cherchait (l'utilisation de moyens informatiques pour faire des mathématiques ne signifie pas que le mathématicien devient idiot !), S. Plouffe a établi que :

$$\pi = \left(\frac{4}{1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{4}{8+1} - \frac{2}{8+4} - \frac{1}{8+5} - \frac{1}{8+6}\right)$$
$$+ \frac{1}{16^2}\left(\frac{4}{16+1} - \frac{2}{16+4} - \frac{1}{16+5} - \frac{1}{16+6}\right) + \cdots$$

ce qu'on écrit aussi :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Cette formule est remarquable, car elle permet de calculer dans le désordre les chiffres de π en base 2 : par exemple, on peut accéder directement au 40 milliardième digit de π, sans avoir à calculer les précédents ! L'équipe canadienne l'a d'ailleurs déterminé : c'est un «1» suivi de 0010010. Personne n'a encore calculé les 40 milliards de chiffres binaires de π qui précèdent, même si c'est techniquement faisable dès maintenant.

Le 22 septembre 1997, Fabrice Bellard a atteint le 1 000 milliardième chiffre binaire de π en utilisant la même technique : c'est un «1», suivi de 000011111110111... Précisons qu'un tel résultat demande une puissance de calcul qui n'est pas à la portée de tout le monde : F. Bellard a réalisé son calcul sur une trentaine de machines, en profitant des moments où elles étaient inoccupées ; son calcul a duré 25 jours, mais s'il avait été réalisé sur une seule machine, il aurait demandé 400 jours !

Pour le calcul de tous les chiffres de π jusqu'à un certain rang, la nouvelle formule n'est pas exceptionnelle (comparée à d'autres, par exemple dues à Ramanujan). Voici ce que l'on trouve en calculant la somme $P(n)$ des n premiers termes de la somme infinie :

$$P(1) = 3{,}1414224664224664224$$
$$P(2) = 3{,}1415873903465815230$$
$$P(3) = 3{,}1415924575674353818$$
$$P(4) = 3{,}1415926454603363195$$
$$P(5) = 3{,}1415926532280875347$$

On gagne moins de deux chiffres par nouveau terme.

Pour les digits mais pas pour les décimales

Indiquons tout de suite que l'on n'a trouvé aucune formule qui soit aussi efficace pour accéder aux chiffres *décimaux* de π indépendamment les uns des autres.

Si c'est π en base 10 qui vous intéresse, pour connaître la 1 000 milliardième décimale, il vous faut pour l'instant calculer celles qui précèdent : à moins de pulvériser le record actuel, cette 1 000 milliardième décimale vous restera inconnue. Le passage de la base 2 à la base 4 ou 8 (ou plus généralement 2^n) peut se faire par petits bouts (on regroupe les chiffres) et, inversement, celui de la base 2^n à la base 2. En revanche, le passage aux autres bases ne peut pas se faire par petits bouts : ce que l'on vient de découvrir possible en base 2 et dans toutes les bases de la forme 2^n ne fait pas avancer le problème en base 10.

Toutefois, au mois de novembre 1996, S. Plouffe a proposé une méthode pour calculer des chiffres décimaux de π indépendamment des précédents en utilisant très peu de mémoire. Cette méthode astucieuse (analogue à celle détaillée plus loin pour les chiffres binaires, mais un peu plus complexe) est fondée sur la formule suivante, connue depuis longtemps :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \times 2^m}{\binom{2m}{m}} = \pi + 3 \qquad \text{avec } \binom{2m}{m} = \frac{2m\,!}{(m\,!)^2}$$

S. Plouffe a conçu son algorithme en exploitant des propriétés particulières des coefficients du binôme de Newton, qui apparaissent au dénominateur et qui n'ont que des petits facteurs.

Malheureusement, avec son algorithme général, utilisable dans toute base, la consommation d'une petite quantité de mémoire se paye par une durée de calcul bien plus grande qu'avec les méthodes du chapitre précédent, qui calculent toutes les décimales (on perd donc d'un côté ce qu'on gagne d'un autre, ce qui est fréquent en informatique).

Ainsi, calculer la n-ième décimale de π par l'algorithme de S. Plouffe nécessite un temps de calcul proportionnel à $n^3 \times \ln(n)^3$, ce qui, en pratique, le rend inutilisable pour dépasser la limite des décimales connues. Une amélioration proposée par F. Bellard en janvier 1997 abaisse le temps de calcul à n^2, ce qui n'est toujours pas suffisant. L'intérêt de cet algorithme est donc uniquement théorique.

La formule de Bailey-Borwein-Plouffe, quant à elle (pour plus de commodité, je l'appellerai formule BBP), est d'un intérêt aussi bien théorique que pratique, car elle donne le n-ième chiffre binaire de π en un temps proportionnel à $n \times \ln(n)$. Elle aurait pu être découverte depuis des siècles, par exemple par Leonhard Euler, qui a trouvé tant de merveilleuses formules. En effet, rien dans sa démonstration n'est délicat ni extraordinaire : la difficulté était d'imaginer qu'une telle formule existe, et de l'écrire, ce qui a attendu 1995. Notons que Eric Kern, de l'Université de Strasbourg, connaissait depuis 1992 une formule analogue, mais que, faute d'en avoir perçu l'intérêt, il ne l'avait pas publiée.

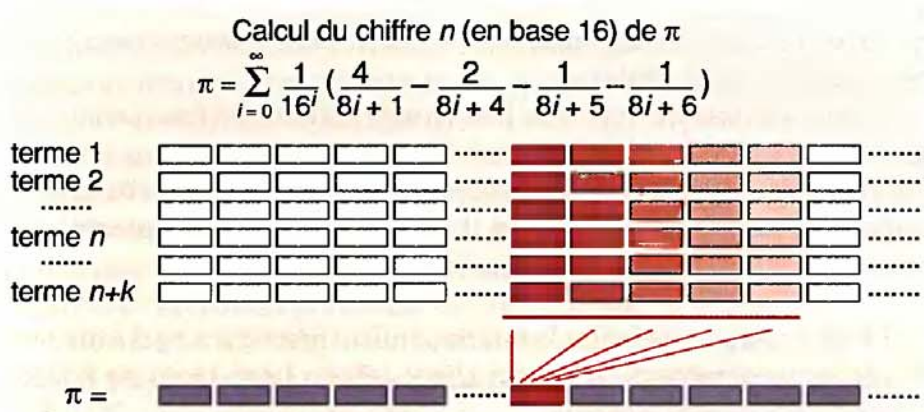
Une fois la formule BBP connue, d'autres formules analogues ont été découvertes pour toutes sortes de constantes mathématiques : comme souvent en science, quand un bout de voile a été soulevé par une équipe géniale ou chanceuse, c'est tout un paysage nouveau qui apparaît. L'équipe de l'Université Simon Fraser a mis à jour un véritable filon de formules fantastiques et inattendues, que l'on n'est pas prêt d'épuiser. D'ailleurs, ce filon contient peut-être des diamants plus gros que celui déjà extrait : on comprend que l'effervescence règne parmi les chercheurs.

Comment utiliser la formule BBP ?

Nous allons expliquer en détail pourquoi la formule BBP permet de calculer le 1 000 milliardième chiffre binaire de π sans avoir à calculer ceux qui précèdent. Nous donnerons cette explication en nous aidant d'exemples numériques, sans faire appel à aucune notion mathématique compliquée. Pour la suivre, il suffit de savoir compter et de maîtriser le jeu des retenues dans une addition.

Comme nous sommes plus habitués à manipuler des nombres écrits en base 10 qu'en base 2 ou 16, nous expliquerons les idées du calcul avec des exemples décimaux. Évidemment, cette explication vaut dans toutes les bases, et c'est en définitive en base 16 (et donc en base 2) qu'elle est vraiment utile. Elle s'organise autour de quatre idées :

Idée 1 : lorsqu'on additionne de très grands nombres (par exemple deux nombres de 200 chiffres chacun), on peut savoir ce qui se passe au milieu (au centième chiffre, par exemple) sans avoir à calculer beaucoup : le calcul de la seule addition des deux chiffres en position 100 ne sera pas toujours suffisant, mais il ne faut pas grand chose de plus.



Grâce à la formule BBP, déterminer le n-ième chiffre de π en base 16 ne nécessite plus que des calculs sur des petits nombres. Il suffit de prendre en compte les n premiers termes de la somme infinie, plus les k termes suivants (avec k relativement petit) pour éviter les problèmes de retenue, et de calculer pour chaque terme le n-ième chiffre ainsi que quelques chiffres suivants *(nuances de rouge)* ; on y arrive sans avoir à calculer les chiffres précédents. En faisant l'addition de ces $n+k$ petits entiers, le dernier chiffre du total de la première colonne rouge (plus les retenues éventuelles des colonnes suivantes) donne le n-ième chiffre en base 16 de π.

Supposons que nous voulions connaître le chiffre en position 100 de l'entier obtenu en additionnant deux nombres de deux cents chiffres, $X = \bullet\bullet\bullet\, a\, b\, c \bullet\bullet\bullet$, qui comporte les chiffres décimaux a, b et c en position 100, 101 et 102, et $Y = \bullet\bullet\bullet\, a'\, b'\, c' \bullet\bullet\bullet$, qui possède les chiffres décimaux a', b' et c' en position 100, 101 et 102.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \scriptstyle 100 & \scriptstyle 101 & \scriptstyle 102 & & & \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & a & b & c & \bullet & \bullet & \bullet \\
+ & \bullet & \bullet & \bullet & a' & b' & c' & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
= & \bullet & \bullet & \bullet & ? & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & a & b & c \\
+ & a' & b' & c' \\
\hline
= & a'' & b'' & c''
\end{array}
$$

Tout est une question de retenues. En calculant la somme de abc et $a'b'c'$ comme on ferait une addition habituelle de deux entiers à trois chiffres, on obtient $a''b''c''$ précédé éventuellement d'un «1» de retenue sans importance pour nous ici. Quand est-ce que le chiffre a'' est bon ? autrement dit, à quelles conditions a'' est-il le chiffre que l'on obtiendrait en position 100 en faisant l'addition complète des 200 chiffres de X et des 200 chiffres de Y ?

La réponse est simple : on est certain que a'' est bon, sauf si $b + b' = 9$ et $c + c' = 9$; dans ce cas, tout dépend de ce qui se passe à droite de $c + c'$ dans la grande addition. S'il y a une retenue à reporter, celle-ci se propagera jusqu'à $a + a'$ qu'il faut changer. Il en résulte que, sauf malchance (au plus une fois sur cent), on tombe sur le bon chiffre a'' en se contentant de calculer trois additions de deux chiffres. En outre, si l'on est malchanceux, on s'en aperçoit : il suffit alors d'aller un peu plus à droite et de calculer avec quelques chiffres de plus pour être certain d'avoir le bon a''.

Ce principe est aussi valable quand on additionne successivement plusieurs grands entiers, ou quand on multiplie un grand entier par un petit entier (un entier de quelques chiffres, 30 ou 50 au plus) : on peut savoir avec certitude ce qui se passe en un endroit quelconque en se contentant de calculer un peu à droite de cet endroit. «Un peu», en pratique, signifie parfois quelques dizaines de chiffres, mais qu'est-ce qu'un calcul sur 30 ou 50 chiffres lorsqu'on évite d'avoir à manipuler des milliards de chiffres !

Nous venons de voir que l'on peut additionner *localement* des grands entiers, ou multiplier *localement* un grand entier par un petit. En revanche, ce n'est pas vrai pour la multiplication de deux grands entiers ou pour la division (sinon il y a longtemps que l'on saurait calculer individuellement les chiffres de π.)

Idée 2 : on peut calculer le n-ième chiffre (pensez à n égal à dix milliards) d'un nombre de la forme $1/(k \times 16^i)$ en base 16 en ne faisant qu'une série de petits calculs.

Pour faciliter la compréhension, nous nous plaçons comme précédemment en base 10 : nous allons expliquer comment on calcule le n-ième chiffre décimal de $1/(k \times 10^i)$ en ne faisant que des petits calculs. Prenons $n = 1\ 000$ (pour alléger un peu) et $i = 35$, $k = 49$. Nous voulons calculer le millième chiffre décimal de $1/(49 \times 10^{35})$.

Chacun sait que, pour multiplier un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. Donc le millième chiffre décimal de $1/(49 \times 10^{35})$ est le 999e chiffre de $1/(49 \times 10^{34})$, qui est le 998e chiffre de $1/(49 \times 10^{33})$, etc. Finalement, il nous reste à calculer le 965e chiffre de 1/49.

En utilisant de nouveau le principe du décalage, on trouve que ce chiffre est le même que le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$.

Supposons que nous réussissions à calculer le reste r de la division de 10^{964} par 49 sans avoir à manipuler de grands nombres *(c'est l'idée 3)*. On a alors : $10^{964} = 49q + r$, avec q entier et $r < 49$, et donc $10^{964}/49 = q + r/49$.

Puisque q est un entier, le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$ est le même que le premier chiffre après la virgule de $r/49$, qui est facile à déterminer en faisant la division (comme r est inférieur à 49, c'est une division entre petits entiers).

Au total (sous réserve que l'on puisse facilement calculer le reste de la division de 10^{964} par 49), nous savons comment calculer le millième chiffre décimal de $1/(49 \times 10^{35})$ et, plus généralement, n'importe quel chiffre isolé en base p d'un nombre de la forme $1/(n \times p^i)$ quand n est un petit entier. Cette possibilité, suivant l'idée 1, s'étend aux nombres de la forme $m/(n \times p^i)$ quand m est un petit entier, et à la somme de telles fractions. Notez bien qu'elle ne s'étend pas à n'importe quelle fraction m/q.

Idée 3 : le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est facile et s'effectue rapidement sans que l'on ait à manipuler de grands nombres.

Pour calculer le reste de la division de 10^{964} par 49, on utilise «l'arithmétique modulo 49», qui consiste simplement à soustraire 49 autant de fois que c'est nécessaire dès qu'on l'a dépassé. Par exemple, $35 + 45 = 80 = 31$, $3 \times 45 = 135 = 37$, etc.

Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 se ramenant au calcul de 10^{964} dans cette arithmétique modulo 49, on procède comme suit (une idée analogue était utilisée par les Égyptiens il y a quatre millénaires pour effectuer la multiplication) :

• Calcul de proche en proche de 10^2, 10^4, 10^8, etc. :

$10^2 = 100 = 2$; $10^4 = 2^2 = 4$; $10^8 = 4^2 = 16$; $10^{16} = 16^2 = 256 = 11$; $10^{32} = 11^2 = 121 = 23$; $10^{64} = 23^2 = 529 = 39$; $10^{128} = 39^2 = 1521 = 2$; $10^{256} = 2^2 = 4$; $10^{512} = 4^2 = 16$;

• Décomposition de 964 en somme de puissances de 2 :
$964 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$
• $10^{964} = 10^{512+256+128+64+4} = 16 \times 4 \times 2 \times 39 \times 4 = 19\,968 = 25$

Dans un tel calcul, seuls des petits nombres sont utilisés et aucune manipulation n'est vraiment longue (même si, à la place de 1 000, on avait mené les calculs avec dix milliards).

Idée 4 : on exploite à présent la formule BBP. Pour chacun des termes de la somme infinie égale à π, il est facile (d'après ce que l'on vient de voir) de connaître le dix milliardième chiffre en base 16, puisque ces termes s'écrivent :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Il semble qu'il y ait quand même une difficulté, car cette somme est infinie. En additionnant un petit nombre de chiffres d'un nombre fini de termes, peut-on négliger la retenue qui risque d'apparaître dans la somme d'un nombre infini de termes ? En fait, $1/16^i$ diminue très rapidement quand i augmente, et il suffit de prendre en compte les dix premiers milliards de termes de la série, plus un petit nombre de termes au delà (bien sûr, le nombre exact de termes et de chiffres est soigneusement évalué). En définitive, la détermination du dix milliardième chiffre de π en base 16 a été ramené à une suite de petits calculs sur de petits entiers, et on n'a jamais eu à mémoriser des milliards de chiffres comme cela était le cas dans toutes les méthodes de calcul de π antérieures (y compris dans la méthode du compte-gouttes).

Pour terminer le calcul et avoir les chiffres binaires de π, il suffit de remarquer que la connaissance du n-ième chiffre de π en base 16 donne les chiffres binaires de π de rang $4n-3$, $4n-2$, $4n-1$ et $4n$. On procède au remplacement de chaque chiffre en base 16 (les lettres de A à F désignant les chiffres de «10» à «15») par quatre chiffres binaires suivant la règle :
$0 \to 0000,\ 1 \to 0001,\ 2 \to 0010,\ 3 \to 0011,\ 4 \to 0100,\ 5 \to 0101,$
$6 \to 0110,\ 7 \to 0111,\ 8 \to 1000,\ 9 \to 1001,\ A \to 1010,\ B \to 1011,$
$C \to 1100,\ D \to 1101,\ E \to 1110,\ F \to 1111$

Les résultats des calculs

Voici quelques résultats donnés par D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe dans leur article sur la nouvelle formule et ses extensions. Rappelons que D. Bailey fut le premier à atteindre 29 millions de décimales en 1986 (sa plaque minéralogique est P314159) et que P. Borwein a trouvé, avec son frère, de nombreuses et efficaces formules de calcul de π dont certaines sont utilisées par Y. Kanada pour établir ses records *(voir le chapitre 7)*.

π en base 16 à partir de la position :

10^6 :	26C65E52CB4593	*(Bailey, Borwein, Plouffe)*
10^7 :	17AF5863EFED8D	*(Bailey, Borwein, Plouffe)*
10^8 :	ECB840E21926EC	*(Bailey, Borwein, Plouffe)*
10^9 :	85895585A0428B	*(Bailey, Borwein, Plouffe)*
10^{10} :	921C73C6838FB2	*(Bailey, Borwein, Plouffe)*
10^{12} :	87F72BIDC9786914	*(F. Bellard)*

Les auteurs ont programmé ces calculs sur les ordinateurs de la NASA où D. Bailey travaille. Comme s'ils craignaient qu'on les accuse de dilapider l'argent du contribuable américain dans des calculs absurdes, ils précisent (comme F. Bellard) qu'ils n'ont utilisé que des machines qui autrement auraient été inoccupées.

Les classes de complexité et π

Au point de vue théorique, qu'apportent la nouvelle formule pour π et les formules du même genre trouvées depuis ? À vrai dire, plusieurs choses importantes.

La classe de Steven SC_2 regroupe les nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en «temps polynomial» et en «espace ln-polynomial». Quand un nombre est dans SC_2, pour en connaître le n-ième chiffre binaire, on doit par exemple calculer pendant n^2 secondes et utiliser $\ln(n)$ mémoires : le temps de calcul augmente, en fonction du numéro n de la décimale que l'on veut connaître, au plus comme un polynôme en n, et la mémoire nécessaire au calcul augmente au plus comme un polynôme en $\ln(n)$ (c'est-à-dire lentement, car $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2$, $\log_{10}(1\,000) = 3$, etc.).

La nouvelle formule pour π ne permet pas de calculer le n-ième chiffre plus rapidement que les méthodes connues avant elle (qui nécessitent toutes le calcul des chiffres précédents) ; en revanche, elle évite l'utilisation et la gestion d'une trop importante quantité de mémoire (ce qui est aujourd'hui l'obstacle fondamental pour ces calculs) : cette économie de mémoire prouve que π appartient à la classe de Steven SC_2, ce que tout le monde ignorait auparavant (et jugeait même improbable).

De plus, l'algorithme général découvert en novembre 1996 par S. Plouffe montre que π est dans la classe de SC_b pour toute base b. Même si c'est au prix d'un ralentissement grave du calcul, on sait aujourd'hui que l'on peut, en théorie, déterminer la n-ième décimale de π sans calculer toutes les décimales précédentes, et surtout que l'on peut aller loin dans la suite des décimales sans disposer de grandes quantités de mémoire.

La formule BBP et l'algorithme général de S. Plouffe ont des conséquences pratiques remarquables : pour calculer n chiffres de π, il n'est plus nécessaire de programmer des calculs en *arithmétique exacte*, c'est-à-dire de développer de longs programmes spécialisés dans la manipulation des entiers de grande taille. Surtout, il n'est plus nécessaire de mémoriser des données intermédiaires de taille proportionnelle à n (l'algorithme compte-gouttes conduit à des programmes courts, mais demande beaucoup de mémoire). Une fois encore, «l'intelligence dispense de la mémoire». L'avantage de Y. Kanada – des machines ayant des mémoires rapides très importantes – a été anéanti, ce qui lui a fait perdre son record : même s'il est aujourd'hui celui qui a calculé le plus grand nombre de chiffres de π, il n'est plus celui qui a vu le plus loin dans les chiffres de π.

En utilisant les méthodes décrites précédemment (ou celles tirées de l'algorithme général de S. Plouffe), on peut se contenter de l'arithmétique de base de l'ordinateur (arithmétique d'une ou deux dizaines de chiffres, bien souvent). Par conséquent, avec un programme de quelques dizaines de lignes seulement, on peut calculer les chiffres de π très loin en toute base, et vraiment très loin en base 2.

Dans le cas binaire, on a ainsi accès à des chiffres de π que personne ne connaissait auparavant *(voir les exemples précédents)*. Ce n'est plus vrai dans le cas décimal, car le ralentissement provoqué lorsqu'on ne veut rien mémoriser est trop pénalisant.

Si la taille de la mémoire n'est plus un problème, d'autres limites (dues au temps de calcul) bornent l'endroit que l'on peut atteindre dans π : π est infiniment long et nous ne connaîtrons jamais que le rivage de cet océan !

L'exploitation de la formule BBP de π n'est pas terminée. Programmée plus soigneusement encore qu'elle ne l'a été depuis les quelques mois qu'elle est connue, ou sur des ordinateurs parallèles, elle donnera certainement des chiffres bien au-delà du 1 000 milliardième. D'après S. Plouffe, on devrait atteindre la 10^{15}-ième position binaire de π dans un proche avenir, ce qui, il n'y a pas si longtemps, était considéré comme définitivement impossible ou réservé à nos arrières petits enfants ! En autorisant le fractionnement du travail de calcul sur une multitude de petites machines, la nouvelle formule rend désormais relativement facile de battre de nouveaux records.

Plus important encore, la formule BBP ouvre la porte à une étude mathématique générale des chiffres de π qui est restée singulièrement décevante jusqu'à présent. La seule chose démontrée au sujet des chiffres de π est que jamais ils ne se répètent périodiquement : sinon π serait rationnel (rapport de deux entiers), et l'on sait depuis la démonstration de Lambert en 1761 que ce n'est pas le cas. Rien d'autre n'est connu sur les propriétés générales des chiffres de π. Le fait qu'il soit transcendant, comme l'a montré Lindemann en 1882, ne fournit aucune propriété générale intéressante de ses digits *(voir les chapitres 9 et 10)*.

Parce qu'elle donne un accès plus immédiat aux chiffres de π que toutes les formules connues jusqu'à présent, la nouvelle formule permettra peut-être de prouver que les chiffres de π sont équitablement répartis (un tel nombre est dit *normal*), ce qui a été constaté mais jamais démontré. Ce serait une avancée remarquable. À défaut, peut-être pourra-t-on trouver des motifs réguliers dans ces chiffres ou une certaine structure, éventuellement complexe mais différente de celle d'une suite aléatoire. Ce serait merveilleux, car tous les tests statistiques faits jusqu'à présent sur les chiffres binaires ou décimaux de π n'ont montré qu'une désespérante banalité *(voir le chapitre 10)*.

S. Plouffe juge une telle avancée possible : «Je crois que la preuve que ln(2) ou π sont normaux en base deux n'est pas loin, et je n'écarte même pas une formule directe qui donnerait la n-ième position de ln(2) en binaire en temps linéaire.» D'autres mathématiciens, tels D. Bailey et Jeff Shallit, croient eux aussi à une avancée prochaine sur ces questions bloquées depuis deux siècles.

Les autres constantes

Des formules analogues à la formule BBP ont été découvertes, qui montrent par exemple que π^2, $\pi\sqrt{2}$ et ln(2) sont dans la classe de Steven SC_2.

Pour les logarithmes, on remarque quelque chose d'étonnant : on a trouvé des formules pour ln(2), ln(3), ..., ln(22), mais pas pour ln(23). Il semble que, pour la majorité des entiers n, ln*(n)* soit dans SC_2. Peut-être même est-ce le cas des logarithmes de tous les entiers, mais cela reste à prouver.

Simon Plouffe, un grand connaisseur de π

Simon Plouffe.

La passion que Simon Plouffe éprouve pour π n'est pas nouvelle. En 1975, il avait réussi à mémoriser 4 096 décimales de π (le record actuel est de plus de 42 000). Il figurait à ce titre dans le *Livre Guinness des records*. Il est amusant que, 20 ans après, il ait participé à une découverte de premier ordre concernant π.

S. Plouffe raconte que, pour mémoriser les décimales de π, il les prenait par groupes de 100, les écrivait plusieurs fois et réussissait ainsi à les connaître grâce à sa mémoire photographique des chiffres. Pour ne pas oublier tous les chiffres appris, il devait régulièrement s'isoler dans le noir et les réciter. Après son record de 4 096 chiffres, il réussit à atteindre 4 400 chiffres et décida alors de s'arrêter. Même avec la meilleure volonté du monde, rares sont ceux qui peuvent réussir de tels exploits : il faut une connivence particulière avec les chiffres qui n'est pas sans rappeler celle des calculateurs prodiges du siècle dernier, ou celle qu'Euler et Ramanujan possédaient de toute évidence.

Les mathématiques expérimentales

L'équipe de l'Université Simon Fraser qui a découvert la nouvelle formule pour π anime un groupe de mathématiciens qui préconisent une nouvelle pratique des mathématiques. Pour eux, les mathématiques sont devenues abstraites à la fin du XIXe siècle parce que tout (ou presque tout) ce qui pouvait être trouvé par des calculs à la main avait été trouvé. Ils soutiennent qu'aujourd'hui, avec les ordinateurs, s'ouvre une nouvelle ère de *mathématiques concrètes et expérimentales*.

L'interaction du mathématicien avec un logiciel de calcul numérique ou formel permet des explorations où la longueur et la complexité des manipulations symboliques ne sont plus des obstacles. L'ordinateur se voit confier des taches fastidieuses de calcul telles que la dérivation, le calcul de primitives, la factorisation des polynômes, etc., et sert ainsi d'assistant au mathématicien. La recherche de correspondances numériques peut être menée à grande échelle, et la démonstration de formules intermédiaires complexes est confiée à des programmes.

La formule BBP aurait pu être découverte sans ordinateur, mais elle l'a été avec ! Elle est apparue à S. Plouffe au terme d'une exploration consciente, où l'intelligence du mathématicien et le pouvoir de manipulation symbolique extraordinaire des programmes informatiques

Le mathématicien expérimentaliste est prêt à utiliser tous les moyens possibles et imaginables pour trouver de nouvelles vérités mathématiques, mais il n'est satisfait que s'il trouve des preuves mathématiques de ce qu'il a vu.

ont travaillé en association étroite. Une fois la formule trouvée, il fallait la démontrer. De nouveau, cela aurait pu être fait à la main, mais l'aide d'un programme rendit la tâche plus facile. Pour ceux qui ont une méfiance instinctive à l'égard de l'ordinateur, précisons que la démonstration trouvée est vérifiable sans ordinateur *(voir l'annexe 1, page 142)*.

Aujourd'hui, ces mathématiciens qui préconisent l'utilisation de l'ordinateur pour trouver de nouvelles «vérités» mathématiques poursuivent des travaux qui avaient été plus ou moins abandonnés à cause de la complexité des calculs à mener, qu'il était impensable de poursuivre à la main. Le grand mathématicien indien Ramanujan avait un don mathématique exceptionnel pour trouver des formules, dont certaines concernent π *(voir le chapitre 7)*, et il avait réussi à aller un peu plus loin que ses prédécesseurs ; aujourd'hui, grâce aux ordinateurs et aux mathématiciens expérimentalistes, son travail se poursuit.

Ordinateurs et vérités mathématiques

Ces recherches posent de nouveaux problèmes à la philosophie des mathématiques : par exemple, il arrive qu'une formule soit découverte avec l'aide de l'ordinateur sans que l'on réussisse à en donner la preuve. Dans un tel cas, les mathématiciens expérimentalistes ne considèrent pas que la formule est vraie : ils acceptent la distinction classique entre vérité prouvée et vérité constatée (distinction qui n'existe sans doute pas en physique). Leur conception expérimentale des mathématiques ne préconise donc pas d'identifier mathématiques et physique.

Le mathématicien expérimentaliste est prêt à admettre que certaines preuves sont trop longues pour une vérification directe à la main. Cependant il se méfie des ordinateurs comme de ses collègues (qui, eux aussi, peuvent se tromper) ; aussi il souhaite utiliser autant que possible des procédures de contrôle pour toutes les parties des démonstrations qu'il ne peut pas vérifier lui-même : calcul fait plusieurs fois, utilisation de méthodes différentes, d'ordinateurs différents, etc.

L'ordinateur est une aide – qu'il serait trop facile de qualifier de bête –, mais, de l'avis général, c'est au mathématicien humain, aujourd'hui encore, de dire si une affirmation mathématique a été prouvée ou si elle ne l'a pas été, et cela *(1)* même lorsque c'est un ordinateur qui a permis de formuler cette affirmation ; *(2)* même s'il est intervenu de manière essentielle dans l'élaboration de la preuve ; et *(3)* même si, pour des raisons de complexité, on ne peut se passer de calculs ou de raisonnements faits par ordinateur pour mener complètement la démonstration. Vraisemblablement aucun des mathématiciens du domaine ne démontrera seul et à la main le tout nouveau théorème «le 1 000 milliardième chiffre binaire de π est un "1"», mais c'est quand même à eux de décider s'il faut considérer comme vraie une telle affirmation.

G. Chudnovsky remarque d'ailleurs, à propos de la réalité des mathématiques, que «π est plus réel que les machines qui le calculent. Ce que nous faisons est très proche de la physique expérimentale : nous sommes en train d'observer π. Le fait que nous puissions l'observer nous conduit à le considérer comme un objet naturel».

Annexe 1 : démonstration de la formule de Simon Plouffe

Pour tout entier k, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)} = \sqrt{2}^k \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+8i}}{8i+k}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}^k \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8i}\,dx$$

$$= \sqrt{2}^k \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx$$

Donc :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,dx$$

d'où, en faisant le changement de variable $y = \sqrt{2}\,x$ et en simplifiant

$$= \int_0^1 \frac{16\,(y-1)}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4}\,dy$$

$$= \int_0^1 4\,\frac{2-y}{y^2 - 2y + 2}\,dy + \int_0^1 4\,\frac{y}{y^2 - 2}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{4-4y}{y^2 - 2y + 2}\,dy + \int_0^1 \frac{4}{1+(y-1)^2}\,dy + \int_0^1 4\,\frac{y}{y^2-2}\,dy$$

$$= \left[-2\ln\left(y^2 - 2y + 2\right) + 4\arctan(y-1) + 2\ln\left(2-y^2\right)\right]_0^1$$

$$= \pi$$

Annexe 2 : quelques formules nouvelles

Voici quelques formules nouvelles permettant des calculs de chiffres isolés pour certaines constantes mathématiques.

La première est plus simple que la formule de D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe, mais converge moins vite :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i}\left(\frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+3} + \frac{1}{6i+3}\right)$$

$$\ln(2)=\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{-16}{(6i)^2}+\frac{16}{(6i+1)^2}-\frac{40}{(6i+2)^2}-\frac{14}{(6i+3)^2}-\frac{10}{(6i+4)^2}\cdot\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

$$\ln(3)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^{i+1}}\left(\frac{16}{(4i+1)}+\frac{4}{4i+3}\right)$$

$$\ln(5)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^{i+1}}\left(\frac{16}{4i+1}+\frac{16}{4i+2}+\frac{4}{4i+3}\right)$$

$$\ln(9/10)=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^i}\frac{1}{i}$$

Cette dernière formule permet le calcul isolé des chiffres décimaux de ln(9/10), et montre donc que, pour la base 10, de telles formules peuvent exister. Pourquoi pas pour π ?

En janvier 1997, Fabrice Bellard a trouvé la formule suivante, qui permet, comme la formule BBP, de calculer isolément les chiffres binaires de π, mais qui accélère le calcul de 43 pour cent :

$$\pi=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(-\frac{32}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{256}{10n+1}-\frac{64}{10n+3}\cdot\right.$$
$$\left.-\frac{4}{10n+5}-\frac{4}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right)$$

C'est cette formule qui, le 22 septembre 1997, lui a permis d'atteindre le 1 000 milliardième chiffre binaire de π.

π est-il transcendant ?

Irrationalité, radicaux et équations algébriques

9

Le nombre π est-il le rapport de deux entiers, c'est-à-dire est-il rationnel ? Le nombre π est-il constructible avec les instruments idéaux du géomètre que sont la règle et le compas ? (autrement dit, peut-on exprimer π par une expression algébrique finie utilisant des racines carrées ?) Le nombre π est-il solution d'une équation ne faisant intervenir que des entiers et des opérations élémentaires, c'est-à-dire est-il algébrique ? Il faudra plus de 20 siècles pour venir à bout de ces questions, qui ne sont que la reformulation, de plus en plus élaborée, de l'interrogation «π est-il définissable de manière finie ?». La réponse ultime vient en 1882 et, avec elle, la fin de l'énigme de la quadrature du cercle, quand Lindemann démontre que π est un nombre transcendant (c'est-à-dire non algébrique). Aujourd'hui, tout est clair, et les rapports entre la géométrie et les nombres sont bien compris. Cela ne signifie pas que tout est devenu facile, ni que toutes les questions élémentaires ont trouvé des réponses, car le monde abstrait où le mathématicien a été entraîné est infiniment riche et complexe, et il réserve de nouvelles énigmes plus profondes et plus difficiles encore.

Les mathématiciens aspirés dans l'infini à la recherche de π

Les nombres les plus simples – on aurait aimé qu'il n'y ait que ceux-là – sont ceux qui sont *finiment définissables*.

Toutefois *finiment définissables* peut vouloir dire plusieurs choses bien différentes. En essayant de le préciser, nous allons parcourir toute l'histoire des mathématiques : de l'Antiquité aux dernières avancées abstraites, et des Pythagoriciens aux frères Chudnovsky.

Le nombre π, pour lequel tout est toujours plus difficile que pour les autres nombres, sera l'empêcheur de danser en rond, celui qui forcera à aller plus loin. Car, malgré les connaissances accumulées sur son compte siècle après siècle, le nombre π résiste toujours.

Dans cette course, nous serons happés par l'infini. Le nombre π sera comme un diamant se dérobant toujours devant les mathématiciens, les forçant à aller de l'avant et, surtout, à se compromettre avec l'infini : même si nous ne voulons pas de l'infini, avec π nous y sommes conduits de force.

Être finiment définissable, c'est être rationnel

Les nombres 0, 1, 2,... ne s'appellent pas par hasard *entiers naturels* : ce sont les nombres que l'on rencontre naturellement, ceux par lesquels on commence. On ne peut certainement pas s'en contenter, car nous devons compter nos dettes et graduer les thermomètres (–500 F, –12 degrés, etc.), et aussi découper des tartes ou des longueurs de ruban (1/4, 150/100, etc.). Acceptons donc les *entiers négatifs*, –2, –1 000, et les *fractions*, 314/100, 1/1 000 000, –1/5, etc. Pris tous ensemble, ces nombres s'appellent les *rationnels*.

Peut-on s'arrêter là ? Autrement dit, toute grandeur est-elle le rapport de deux nombres entiers ?

Les Pythagoriciens (école de mathématiciens des VI^e^ et V^e^ siècles avant J.-C.), qui vouaient un culte aux nombres, le souhaitaient ardemment. Ils semblent même l'avoir cru un moment, mais ils découvrirent un raisonnement qui les jeta dans l'épouvante et força les mathématiciens à franchir le premier pas vers l'infinie complexité organisée de l'Univers des nombres. Ce raisonnement établit qu'il existe nécessairement d'autres grandeurs que les rapports de deux entiers ; il est si révolutionnaire, par sa forme et par sa conclusion, que certains mathématiciens le considèrent comme l'acte fondateur des mathématiques.

On ignore quelle version les Pythagoriciens découvrirent en premier, car diverses variantes étaient à la portée des mathématiciens de cette époque (l'existence de variantes confirme d'ailleurs que l'on ne peut pas échapper à la conclusion du raisonnement). Même si vous n'êtes pas très amateur de raisonnements, faites l'effort de comprendre cette démonstration que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, car elle en vaut la peine.

Théorème : le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire sous la forme du quotient de deux nombres entiers.

Démonstration : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q deux nombres entiers.

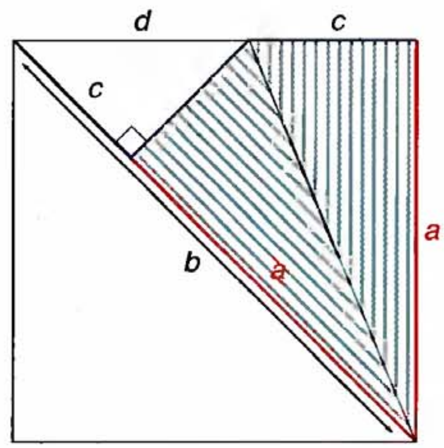
On suppose que p et q n'ont pas de facteurs communs ; s'ils en avaient, on simplifierait la fraction jusqu'à ce qu'ils n'en aient plus. En particulier, p et q ne sont pas tous les deux pairs (si l'on part de 14/10, on simplifie en 7/5). Élevons au carré l'égalité $\sqrt{2} = p/q$ de chaque côté du signe égal et multiplions par q^2. On obtient $2q^2 = p^2$. Le carré d'un nombre impair est impair (car le produit de deux impairs est impair). Or le nombre p^2 est pair (car il s'écrit aussi $2q^2$), donc p ne peut pas être impair : p est pair. On peut alors remplacer p par $2p'$ (un nombre pair est le double d'un autre, par définition). On a ainsi $2q^2 = 4p'^2$. Simplifions par 2, ce qui donne $q^2 = 2p'^2$. En remarquant de nouveau que le carré d'un nombre impair est impair, on trouve cette fois que q est pair. Or il est impossible que p et q soient tous les deux pairs, car au départ on avait simplifié la fraction de manière à ce que numérateur et dénominateur ne soient pas tous les deux pairs. C'est donc notre hypothèse initiale qui est fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas le rapport de deux entiers. Fin de la démonstration.

Le raisonnement n'est pas très compliqué, mais ses conséquences sont graves : il existe d'autres nombres que les fractions !

Cette découverte provoqua un scandale terrible, et les Pythagoriciens en furent atterrés. Leur doctrine selon laquelle «tout est nombre» (pour eux, cela signifiait bien sûr «tout est nombre entier») s'écroulait. On qualifia ces grandeurs rebelles à l'écriture fractionnaire *d'irrationnelles*, et ce nom fait encore entendre l'écho de l'ancien scandale : si l'on n'a pas réussi à écrire la longueur de la diagonale du carré comme le rapport de deux entiers, ce n'est pas seulement que nous en sommes incapables aujourd'hui, mais c'est que la nature du monde mathématique l'interdit à jamais.

La légende veut que Hippasos de Metaponte, le découvreur du raisonnement maudit, ait péri dans un naufrage. Selon le polygraphe grec du Ve siècle Proclus, «les auteurs de la légende ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Si l'âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants.»

La conclusion inévitable du raisonnement précédent crée une gêne, car on a l'impression que les rationnels suffisent pour tout mesurer, et l'on comprend mal qu'il faille y ajouter quelque chose : n'a-t-on pas introduit des complications superflues là où tout devrait être simple ? Ce sentiment persiste encore aujourd'hui à propos des mesures en physique, où l'on ne se pose jamais la question de savoir si ce que l'on mesure est rationnel ou irrationnel : puisqu'en dessous de 10^{-30}, ni les longueurs, ni le temps n'ont de sens, les entiers pourraient suffire aux physiciens. Les nombres irrationnels ne paraissent pas concerner le monde réel. L'ajout de nouveaux nombres aux rationnels semble avoir été consenti uniquement pour faire plaisir aux ratiocineurs que sont les mathématiciens ; ceux-ci, bien sûr, vont maintenant se demander si π est rationnel. La réponse attendra 1761.



Un raisonnement totalement géométrique établit qu'aucun segment S ne peut se trouver un nombre entier de fois dans le côté a d'un carré et en même temps dans sa diagonale b (ce qui établit que leur rapport, $\sqrt{2}$, n'est pas un nombre rationnel). Si un tel segment S existait, il serait un nombre entier de fois dans le segment c (défini en rabattant le côté a sur la diagonale), puisque $c = b - a$. De l'identité des triangles hachurés, on déduit que l'hypoténuse d du triangle rectangle isocèle de coté c contient elle aussi le segment S un nombre entier de fois (puisque $d = a - c$). On recommence alors cette construction sur le demi-carré de côté c ainsi défini, et ainsi de suite. On arrive nécessairement, en un nombre fini d'étapes, à un triangle rectangle isocèle dont le petit côté serait strictement plus petit que S et qui, pourtant, devrait contenir S un nombre entier de fois, ce qui est absurde. S n'existe pas, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Vraiment les rationnels ne suffisent pas

Il existe d'autres méthodes pour montrer que les nombres rationnels ne sont pas suffisants. L'une d'elles consiste à réfléchir au procédé de division que nous avons appris à l'école. Quand on divise un entier p par un entier q sans facteurs communs, il est clair que l'on finit toujours, dans le cours de la division, par retomber sur le même reste intermédiaire (tous les restes sont inférieurs à q et il n'y a qu'un nombre fini de nombres entiers inférieurs à q). À partir du moment où l'on trouve un reste déjà obtenu, les calculs se refont exactement de la même façon. Par conséquent, le développement décimal d'un nombre rationnel, quand il est infini, est périodique à partir d'un certain rang (et sa période est inférieure à q).

Inversement, si un nombre est périodique à partir d'un certain rang, il est rationnel. Montrons-le sur un exemple (qui se généralise sans difficulté) :

$$3{,}14159159159159... = \frac{314}{100} + \frac{159}{100\,000}\left[1 + \frac{1}{1\,000^1} + \frac{1}{1\,000^2} + \frac{1}{1\,000^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{314}{100} + \frac{159}{100\,000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1\,000}} = \frac{314}{100} + \frac{159}{99\,900} = \frac{313\,845}{99\,900} = \frac{20\,923}{6\,660}$$

La somme entre crochets correspond en effet à la série géométrique classique qui, pour un terme a inférieur à 1, est égale à :

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ... = 1/(1-a)$$

Cette formule résulte de l'identité (qu'on démontre par développement et simplification) :

$$(1-a)(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n) = 1 - a^{n+1}$$

En conclusion, on a établi un caractère important des nombres rationnels : *un nombre est rationnel, si et seulement si son développement décimal (ou dans n'importe quelle autre base) est périodique à partir d'un certain chiffre.*

Comme il est clair que les nombres ne sont pas tous périodiques à partir d'un certain chiffre, on ne peut pas se contenter des nombres rationnels.

Ce résultat permet de construire des nombres irrationnels à volonté. Il suffit de s'arranger pour que les décimales de ces nombres ne soient jamais périodiques. Par exemple,

$$a = 0{,}101001000100001...$$

dont la suite des décimales est obtenue en mettant de plus en plus de "0" entre les "1" : d'abord 1, puis 2, etc.

Nous verrons plus loin que si l'on met encore plus de "0" entre les "1", on obtient des nombres transcendants. Toutefois ce résultat ne règle pas le cas de π (et ne permettrait même pas de traiter le cas de $\sqrt{2}$ si l'on ne disposait pas d'un raisonnement par l'absurde).

Se soumettre aux raisonnements par l'absurde ?

Relisez bien les raisonnements établissant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, pénétrez-vous en, car ils sont caractéristiques d'une situation qui s'est reproduite de nombreuses fois dans l'histoire des mathématiques et qu'il est crucial de ressentir pleinement. L'irrationalité de π, sa transcendance, la non dénombrabilité des réels, l'indécidabilité logique, tout cela se ressemble.

Aussi élémentaires qu'ils soient (ce n'est pas toujours le cas), ces raisonnements ne sont pas convaincants pour tout le monde. Il faut commencer par supposer le contraire de ce qu'on cherche à prouver, puis en déduire des conséquences contradictoires, et en conclure alors l'impossibilité de l'hypothèse : on ne montre pas que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on montre qu'il serait absurde de le considérer rationnel.

Dans la vie courante, le fait qu'une attitude nous conduise à l'absurde ne suffit pas toujours à nous en dissuader. Nous nous comportons souvent suivant le principe : «cela semble ne pas pouvoir marcher, mais je le fais quand même, je verrais bien ; peut-être qu'apparaîtra quelque chose de nouveau qui me prouvera que j'avais raison de ne pas me laisser intimider par l'absurde». Forcer ainsi les choses marche parfois : avez-vous remarqué, lorsque vous tentez votre chance en négligeant un panneau «route barrée, travaux», qu'au moins une fois sur deux vous réussissez à passer et à éviter ainsi un détour ?

Tous les raisonnements d'impossibilité laissent un petit goût d'inachevé et donnent le sentiment que l'on pourrait éviter les complications où nous entraînent leurs conclusions. Toutefois, si l'absurde ne suffit pas toujours à nous convaincre dans la vie courante, il y suffit dans le monde mathématique. À moins de renoncer aux mathématiques, il faut accepter que $\sqrt{2}$ est irrationnel, même si l'on a l'impression de ne pas bien comprendre ce qui se passe. D'ailleurs, une fois le raisonnement pythagoricien connu, tous les mathématiciens l'ont accepté et se sont empressés de le généraliser : on montre ainsi sans trop de mal que $\sqrt{n}$ est irrationnel, sauf si n est exactement un carré, tels 4, 9, etc.

Quant à la démonstration que π est irrationnel ou que π est transcendant *(voir l'annexe)*, comme elle est plus difficile, plus longue et plus indirecte, on sera encore plus insatisfait : on constatera bien que l'on arrive à une contradiction, mais sans que ce constat nous apprenne quoi que ce soit (en dehors du fait que supposer π rationnel ou algébrique *produit* une contradiction).

Ce type de situation nous fait ressentir très fortement que nous ne choisissons pas le monde mathématique, mais que nous découvrons un monde préexistant dont tous les éléments sont liés les uns aux autres selon un réseau de relations rigides. Parfois, nous voyons ces relations sans en comprendre la structure, comme cela se passe dans le monde physique. Quelqu'un trouve un cheminement (d'apparence arbitraire) qui, partant de l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel, conduit à une contradiction ; je peux suivre son chemin, bien que je n'arrive pas à savoir précisément pourquoi on passe par là ; je trouve alors la contradiction à l'endroit indiqué et je n'ai plus qu'à en tirer les conséquences. Même si je ne perçois presque rien du dédale du paysage mathématique, l'existence du chemin est indubitable et ne peut plus être négligée. Suivre de telles démonstrations, c'est comme avoir entre les mains la preuve irréfutable que votre vieil ami, qui a toujours été si gentil, est en fait un assassin : même si vous ne comprenez pas comment c'est arrivé ni quelle est la cohérence de tout ça, la force de la preuve vous oblige à en tirer les conclusions.

En mathématiques, il arrive fréquemment que les preuves données par les découvreurs soient par la suite simplifiées. Cela s'est produit pour la preuve de la transcendance de π. On est tenté de conclure que celui qui a trouvé le premier la preuve n'en avait pas forcément une meilleure compréhension que vous au moment où vous la lisez ; a-t-il tâtonné longtemps, puis est-il tombé par hasard sur ce cheminement bizarre qui aboutit à la contradiction ?

Le fait que les grands théorèmes négatifs, tels ceux de l'irrationalité de π et de sa transcendance, n'aient pas été découverts par les mathématiciens ayant la vision et l'intuition la plus puissante (Leibniz, Euler ou Gauss auraient pu les trouver) en est peut-être l'indice : ces merveilleux résultats résulteraient davantage d'un acharnement à rechercher un chemin dans un paysage confus et brumeux que d'une vision globale et éclairée.

Les nombres e et π sont irrationnels

La démonstration, esquissée plus loin, de l'irrationnalité de π est nettement plus complexe que celle de l'irrationnalité du nombre e (le nombre qui définit les logarithmes). Pour vous faire goûter cette progressive montée de la complication des raisonnements par l'absurde, voici celui, assez facile, concernant e ; il fut proposé par Euler en 1744.

Théorème : le nombre e, défini par la série :

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \cdots$$

est irrationnel.

Démonstration : si e est rationnel, il s'écrit p/q (avec $q > 1$, car on sait que e n'est pas un entier, $e = 2{,}718284590...$). Multiplions les deux côtés de l'égalité par $q\,!$:

$$q\,!\,e = q\,! + \frac{q\,!}{1\,!} + \frac{q\,!}{2\,!} + \frac{q\,!}{3\,!} + \cdots + \frac{q\,!}{q\,!} + \frac{q\,!}{(q+1)\,!} + \frac{q\,!}{(q+2)\,!} + \cdots$$

Le premier membre, $q\,!\,e$, est un entier, car, par définition, $q\,! = q\,(q-1)\,(q-2)\ldots 2\times 1$, d'où $q\,!\,p\,/\,q = (q-1)\,!\,p$.

Les premiers termes du second membre, jusqu'au terme $q\,!\,/\,q\,! = 1$, sont aussi des entiers (car $q!\,/\,m!$ se simplifie si $q > m$). Donc, par soustraction, on trouve que :

$$q\,!\,e - \left(q\,! + \frac{q\,!}{1\,!} + \frac{q\,!}{2\,!} + \frac{q\,!}{3\,!} + \cdots + \frac{q\,!}{q\,!}\right) = \frac{q\,!}{(q+1)\,!} + \frac{q\,!}{(q+2)\,!} + \cdots$$

est aussi un entier.

Après simplification, le second membre de l'égalité devient :

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\,(q+2)} + \cdots$$

Le premier terme de cette somme est strictement inférieur à 1/2 (car $q > 1$), le deuxième inférieur à 1/4, le troisième inférieur à 1/8, etc. La somme est donc strictement inférieure à $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$. Par conséquent, elle n'est pas un entier, ce qui constitue une contradiction. Fin de la démonstration.

L'effet que j'évoquais précédemment est encore net ici : on aboutit à la conclusion que e est irrationnel, mais peut-on dire que l'on comprend que e est irrationnel ?

Venons-en à la démonstration que π est irrationnel. Elle ne fut rendue possible que par les progrès de l'analyse des XVII^e et XVIII^e siècles, et fut trouvée en 1761 par le mathématicien helvète Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Elle se décompose en trois étapes :

• Par un jeu d'inégalités de même nature que pour e, Lambert établit que tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction continue :

$$\cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{a_n}{b_n + \cdots}}}}$$

avec $|a_i| < |b_i|$ à partir d'un certain rang, est irrationnel.

• Il utilise ensuite le fait que pour tout x tel que $\tan(x)$ est défini, $\tan(x)$ peut s'écrire :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

• Il finit par le raisonnement suivant : si π est rationnel, alors, à partir d'un certain rang j, $x^2 = (\pi/4)^2$ est inférieur à $b_j = 2j + 1$; donc $\tan(\pi/4)$

est irrationnel. Or c'est absurde, car $\tan(\pi/4) = 1$, et c'est donc π qui est irrationnel.

Le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752-1833), en partant du fait que $\tan(\pi) = 0$, déduira par un procédé analogue que π^2 est irrationnel. Ce résultat indique que si π et $\sqrt{2}$ ont en commun d'être irrationnels, π est sans doute d'une nature plus complexe que $\sqrt{2}$.

Il ne faut pas croire que les démonstrations d'irrationalité deviendront faciles une fois que les techniques mathématiques auront progressé. Par exemple, il faudra attendre 1978 pour que le mathématicien français Roger Apéry démontre l'irrationalité du nombre $\zeta(3)$, défini par :

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$$

Pour $\zeta(5)$, et plus généralement pour $\zeta(2n + 1)$, $n > 2$, on ignore toujours la réponse, comme d'ailleurs pour $e + \pi$, $e \times \pi$ et e / π.

Être finiment définissable, c'est être constructible à la règle et au compas

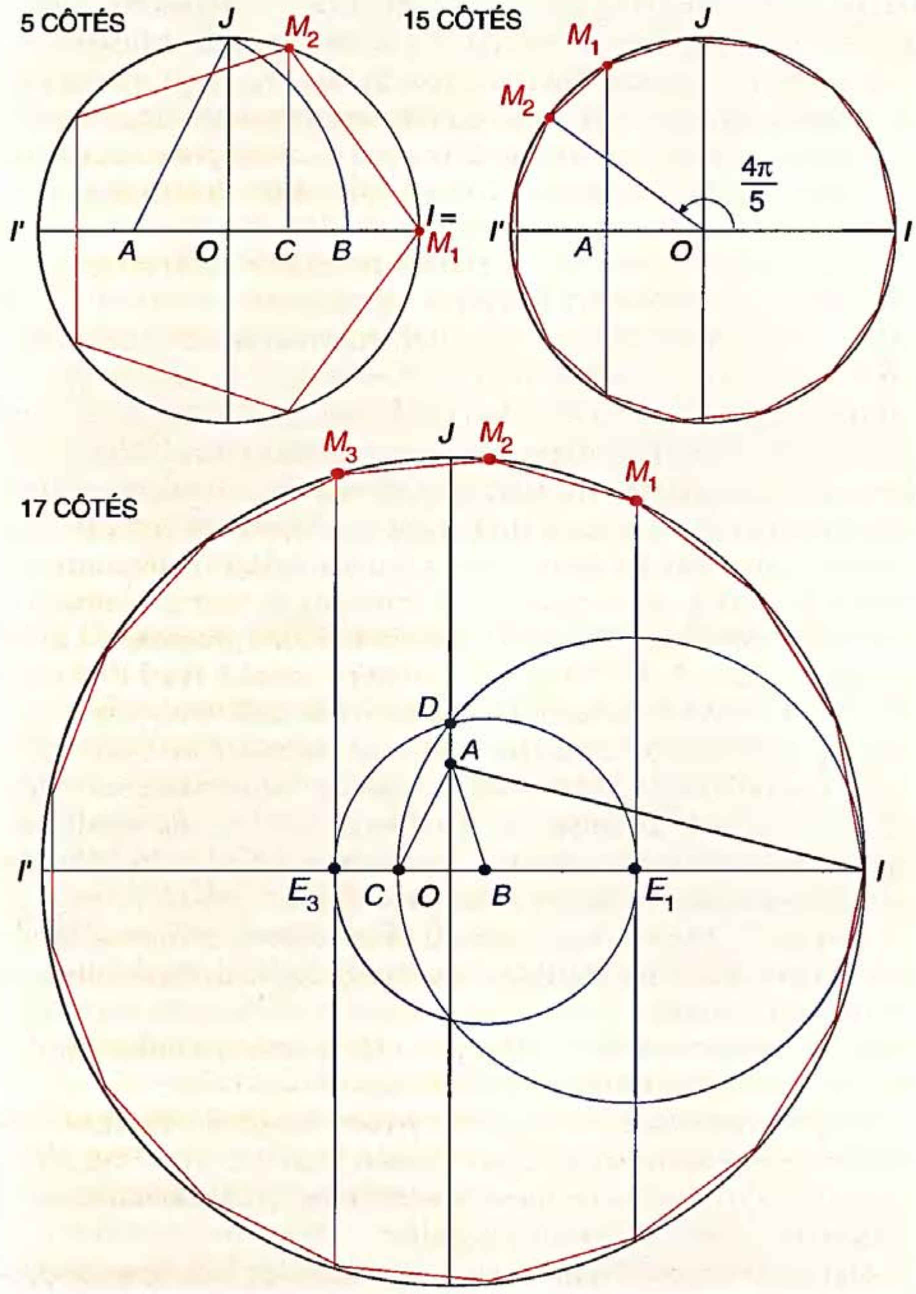
Une fois que les mathématiciens, instruits par $\sqrt{2}$ et π, eurent admis l'insuffisance des nombres rationnels, il était naturel qu'ils se disent : «d'accord pour les radicaux, essayons de nous en sortir avec eux seulement». Autrement dit : «essayons de ne considérer que les grandeurs définissables à partir d'un nombre fini d'opérations élémentaires d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'extraction de racine carrée, par exemple :

$$\sqrt{123} \qquad \sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{7}}}} \qquad \frac{\sqrt{\sqrt{7}+37\sqrt{337}}}{\sqrt{3\,337+\sqrt{33\,337}}}$$

Puisqu'avec les rationnels, on avait presque tout ce qu'il nous fallait, avec ceux-là en plus, ça doit certainement aller».

Une autre façon de voir les choses (plus exacte historiquement) est de considérer que, puisque $\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas, les grandeurs que l'on obtient par la géométrie de la règle et du compas forment un ensemble plus riche et moins artificiel que celui des seuls nombres rationnels ; c'est donc à elles que l'on doit se fier plutôt qu'aux constructions abstraites à partir des nombres entiers, qui provoquent des désillusions.

Ne retenir que les grandeurs constructibles à la règle et au compas était un peu risqué (cette définition serait-elle vraiment suffisante ?), et c'est sans doute la vague perception de ce risque qui a donné tant d'importance au problème de la quadrature du cercle : afin de s'assurer que l'on ne manquait rien d'important, il fallait trouver la définition



Construction de polygones réguliers à 5, 15 et 17 côtés à la règle et au compas. Pour le pentagone : Tracer *A* tel que $OA = OI'/2$, puis le cercle de centre *A* et de rayon *AJ*, qui coupe *II'* en *B*. Tracer ensuite *C* tel que $OC = OB/2$. La verticale menée par *C* coupe le grand cercle en M_2, et M_1M_2 est l'un des côtés du pentagone. Pour le polygone à 15 côtés : on utilise que $\cos(10\pi/15) = \cos(2\pi/3) = -1/2$ pour tracer M_1, et on prend un sommet M_2 du pentagone. Pour le polygone à 17 côtés : Tracer *A* tel que $OA = OJ/4$, *B* tel que *OAB* soit le quart de l'angle *OAI* et *C* tel que *BAC* vale 45°. Tracer le cercle de diamètre *CI*, qui coupe *OJ* en *D*, puis le cercle de centre *B* passant par *D*, qui coupe *II'* en E_1 et E_3 ; les verticales menées par ces points coupent le grand cercle en M_1 et M_3. En prenant le milieu M_2 de l'arc M_1M_3, on a deux côtés du polygone.

(en termes géométriques purs) de la grandeur correspondant au rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Nous ne comprenons pas très bien aujourd'hui pourquoi, durant une longue période, on a considéré comme évident que l'on finirait par trouver une solution.

Le point de vue géométrique de la règle et du compas et le point de vue algébrique des racines carrées sont équivalents. Il revient en effet au même :

- de considérer toutes les grandeurs finiment définissables par construction géométrique à la règle et au compas ;
- de considérer toutes les grandeurs finiment définissables par opérations algébriques simples incluant l'extraction de racine carrée.

Toutefois, avant d'en arriver à cette conclusion claire, les mathématiciens devront d'abord reconnaître et maîtriser complètement le lien entre les nombres et la géométrie. Ce travail progressera grâce à Descartes, qui comprit assez clairement les connexions entre la résolution des équations du premier et du deuxième degré et les constructions à la règle et au compas, sans toutefois arriver à l'énoncé de caractérisation donné ci-dessus *(et formulé plus précisément dans l'annexe 1, page 164)*. Cet énoncé échappa aussi à Karl Friedrich Gauss, qui trouva une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit constructible à la règle et au compas, mais qui démontra seulement que la condition est suffisante. Cette condition est que le nombre de côtés du polygone doit être un entier ayant une décomposition en facteurs premiers du type $2^i \times p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$, où les p_i sont des nombres premiers de la forme $2^{2^k} + 1$.

L'énoncé de caractérisation est dû à Pierre Laurent Wantzel, qui le démontra en 1837. Le problème de la quadrature du cercle, dès lors rendu clair, devenait :

«trouver une expression algébrique (utilisant éventuellement des racines carrées) qui donne exactement π. »

La prise de conscience de la vraie nature des grandeurs constructibles à la règle et au compas a permis de reformuler le problème de la quadrature du cercle en un problème algébrique, et surtout d'en envisager sereinement une réponse négative.

Dans l'article de Wantzel de 1837, deux des trois grands problèmes de la géométrie antique étaient d'ailleurs résolus négativement. Aussi est-il injuste que le nom de ce répétiteur de l'École Polytechnique soit si souvent oublié dans les livres d'histoire des mathématiques (dans celui de Nicolas Bourbaki, par exemple). Wantzel démontra l'impossibilité :

- de la duplication du cube : à partir d'un cube donné, construire un cube de volume double ;
- de la trisection de l'angle : trouver une construction permettant de couper tout angle en trois.

Traduits en termes algébriques, ces problèmes s'énoncent :
- trouver une expression algébrique finie de $\sqrt[3]{2}$ avec des racines carrées ;
- trouver une expression algébrique finie de $\sin(x/3)$ utilisant des racines carrées et $\sin(x)$.

Les connaissances d'algèbre dont Wantzel disposait suffisaient pour démontrer qu'aucun de ces problèmes ne possède de solution. Remarquons au passage que, dès 1775, l'Académie des Sciences avait décidé de rejeter sans examen toutes les propositions de solution des problèmes de la quadrature du cercle et du mouvement perpétuel *(voir le chapitre 2, page 36)*. Concernant la quadrature, aucun argument mathématique ne justifiait à cette date une telle attitude, que l'on peut trouver quelque peu cavalière. Quant au mouvement perpétuel, les fluctuations quantiques du vide ne montrent-elles pas qu'il est toujours d'actualité ?

Niels Henrik Abel (1802-1829).

Être finiment définissable, c'est être algébrique

Au début du XIXe siècle, les progrès de l'algèbre conduisent à la compréhension claire que ni les racines carrées, ni même les racines n-ièmes, ne suffisent pour représenter toutes les grandeurs.

En effet, le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829) établit en 1824 que certaines équations de degré supérieur à 4 ne sont pas résolubles par radicaux. Pour le degré 2, on savait depuis l'Antiquité que les racines carrées suffisent ; pour les degrés 3 et 4, Jérôme Cardan et Ludovico Ferrari avaient montré vers 1550 que l'on s'en sort en prenant en plus des racines cubiques. Jusqu'au travail d'Abel, on avait cherché vainement à généraliser les formules connues. Évariste Galois (1811-1832) compléta le résultat d'Abel en proposant une caractérisation des équations polynomiales résolubles par radicaux (et en créant par la même occasion la théorie des groupes), avant, comme on le sait, d'aller se faire assassiner dans un duel stupide.

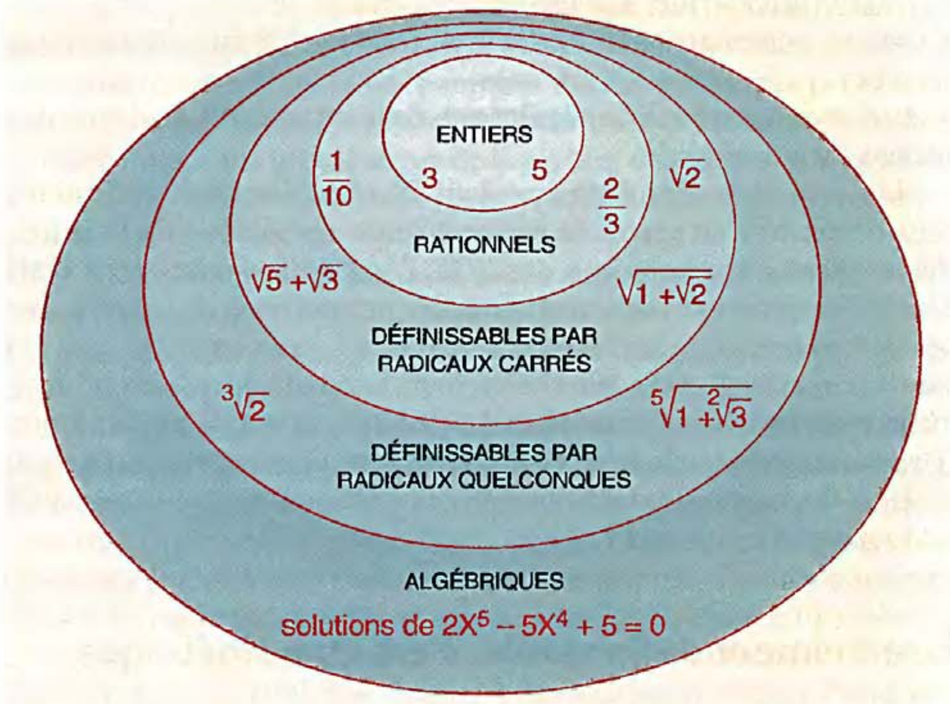
Évariste Galois (1811-1832).

En résumé, ni les rationnels, ni les nombres définissables par racines carrées, ni même les nombres définissables par racines quelconques ne permettent d'obtenir toutes les grandeurs.

Une extension de l'idée de grandeur *finiment définissable* s'imposait donc. Ce sera la notion de *nombre algébrique* : un nombre est algébrique s'il existe une équation à coefficients entiers (une telle équation est appelée *équation algébrique*) dont il est solution. Les nombres qui ne sont pas algébriques sont nommés *transcendants.* Par exemple :

$\sqrt{2}$ est algébrique, car il est solution de l'équation $X^2 - 2 = 0$.
$\sqrt[3]{2}$ est algébrique, car il est solution de l'équation $X^3 - 2 = 0$.

L'emboîtement des familles de nombres finiment définissables.



On montre que tous les nombres définissables par radicaux sont algébriques ; de même, la somme de deux nombres algébriques, leur produit, leur quotient, et tout nombre finiment construit à partir de nombres algébriques et de radicaux, sont encore des nombres algébriques. Enfin, les nombres qui vérifient $X^5 + 2\sqrt{2}X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X - \sqrt{2} = 0$ ou toute équation du même genre à coefficients algébriques sont algébriques. Notons qu'il existe des nombres algébriques qui ne sont pas définissables par radicaux : c'est par exemple le cas des solutions de l'équation $2X^5 - 5X^4 + 5 = 0$

Remarque : nous ne parlons pas ici des nombres complexes, car ils constituent une extension bénigne de la notion de nombre du fait que tout nombre complexe se réduit à un couple de nombres réels.

La plupart des nombres que l'on rencontre naturellement sont rationnels, ou définissables par radicaux, ou algébriques ; cependant, à l'époque de Galois, il existait deux nombres remarquables, e et π, dont on ignorait encore le statut, car personne n'avait trouvé d'équation algébrique dont ils seraient les solutions. Sont-ils transcendants ? Et d'ailleurs, existe-t-il des nombres transcendants ?

Les réponses à ces questions viendront dans le cours du XIX^e^ siècle. Elles seront positives et feront prendre conscience que l'infini des nombres est plus grand qu'on ne l'avait imaginé. L'intraitable π, après avoir joué un rôle central en analyse, nous aura alors entraîné bien loin de la géométrie, vers l'algèbre la plus abstraite et même dans l'infini de Cantor.

Petite histoire de la transcendance

Joseph Liouville (1809-1882).

Voici quelques étapes de cette histoire des nombres transcendants.

(a) Il existe des nombres transcendants

En 1844, Joseph Liouville (1809-1882) trouve un résultat remarquable qui est publié en 1851 et qui montre que tous les nombres ne sont pas algébriques.

Plus précisément, il prouve que si x est irrationnel et racine d'une équation algébrique de degré n, alors il existe une constante $C > 0$, telle que tout rationnel p/q vérifie : $|x - p/q| \geq C/q^n$.

Cela signifie qu'un nombre irrationnel algébrique ne peut pas être approché de trop près par un rationnel.

Il en résulte (par négation) que tout nombre irrationnel qui peut être approché de près par des rationnels est nécessairement transcendant. Plus précisément, tout nombre irrationnel tel que, pour tout entier n et tout $C > 0$, il existe p et q vérifiant $|x - p/q| < C/q^n$, est transcendant (de tels nombres sont nommés *nombres de Liouville*). Le nombre dont le développement décimal (ou en base 2) est : 0,11000100000000000000000010000... (on place des «1» aux positions $n\,!$, c'est-à-dire 1, 2, 6, 24, 120, ...) est un nombre de Liouville (donc il est transcendant) ; on l'appelle parfois *le nombre de Liouville.* D'une part, ce nombre est irrationnel puisque son développement n'est jamais périodique, d'autre part, les longues séquences de zéros permettent de l'approcher de plus en plus finement par des rationnels.

En plaçant encore un peu plus de «0» entre les «1», on obtient d'autres nombres transcendants, une variété infinie si on le souhaite. Par exemple, on peut affirmer que les nombres définis par les séries suivantes sont transcendants :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n^n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5^{n!}}$$

Bien sûr, le fait que les nombres de Liouville sont transcendants ne signifie pas que tous les transcendants sont des nombres de Liouville. La question se posera en fait pour chaque nombre que l'on démontrera transcendant et donc pour π (qui, finalement, n'est pas un nombre de Liouville). On découvrira par la suite que les nombres de Liouville ne représentent en fait qu'une infime partie des nombres transcendants.

(b) Les nombres transcendants sont plus nombreux que les nombres algébriques

Georg Cantor (1845-1918), le grand mathématicien allemand créateur de la théorie des ensembles, propose en 1873 une autre méthode pour obtenir des nombres transcendants.

Georg Cantor (1845-1918).

Sa méthode (contrairement à ce que l'on croit parfois) permet, comme celle de Liouville, de définir avec une parfaite précision – autrement dit de construire – des nombres transcendants. Nous allons la détailler, ce qui montrera qu'il est possible de construire un nombre et de démontrer qu'il est transcendant en n'utilisant que des raisonnements élémentaires tenant sur une page.

Théorème : il existe des nombres transcendants.

Démonstration : attribuons à chaque équation algébrique un *poids* en faisant la somme des valeurs absolues de ses coefficients et de son degré. L'équation algébrique $3X^5 - 7X + 1 = 0$ a par exemple le poids $3 + 7 + 1 + 5 = 16$.

Pour un entier n fixé, il n'y a qu'un nombre fini d'équations algébriques de poids n (car, pour avoir le poids n, une équation algébrique doit avoir un degré inférieur ou égal à n, et tous ses coefficients doivent avoir une valeur absolue inférieure ou égale à n).

Cela nous permet de classer toutes les équations algébriques en une liste :
– on prend d'abord les équations de poids 1. Il n'y a que $1 = 0$, $-1 = 0$ (aucune n'a de solutions).
– on prend ensuite toutes les équations de poids 2. Il y en a quatre, qui sont $2 = 0$; $-2 = 0$; $X = 0$; $-X = 0$.
– on prend ensuite toutes les équations de poids 3. Il y en a dix, qui sont $3 = 0$; $-3 = 0$; $2X = 0$; $-2X = 0$; $X + 1 = 0$; $-X + 1 = 0$; $X - 1 = 0$; $-X - 1 = 0$; $X^2 = 0$; $-X^2 = 0$.
– etc. (à chaque niveau, on classe les équations dans un ordre bien précis).

Notons $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$ cette liste d'équations. Les solutions de chacune de ces équations sont en nombre fini (car une équation algébrique de degré n possède au plus n solutions distinctes). Classons toutes ces solutions en une liste (certains nombres apparaîtront plusieurs fois, mais c'est sans importance) en prenant les solutions de l'équation E_0 (s'il y en a), puis celles de l'équation E_1 (s'il y en a), etc. On obtient ainsi une liste $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ de toutes les solutions possibles de toutes les équations algébriques possibles, autrement dit une liste de tous les nombres algébriques. Cette première partie du raisonnement est simplement l'explicitation de la démonstration que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable (c'est-à-dire associable dans une correspondance terme à terme à l'ensemble des nombres entiers 0, 1, ...).

Considérons maintenant un nombre réel de la forme $r = 0{,}c_0c_1c_2c_3c_4\ldots$ dont le premier chiffre décimal après la virgule c_0 est choisi différent du premier chiffre après la virgule de s_0 (on convient par exemple de prendre 4 ou 5 selon que s_0 vaut 5 ou est différent de 5), dont le deuxième chiffre décimal après la virgule c_1 est choisi différent du deuxième chiffre après la virgule de s_1 (même principe de choix), etc. Pour éviter certaines complications dues aux égalités du genre 1 = 0,9999..., il est important de choisir c_i toujours différent de 0 et de 9. Le nombre r qu'on vient de définir (explicitement) est différent par construction de tout nombre algébrique. C'est un nombre transcendant. Cette seconde partie du raisonnement est l'application du procédé de «diagonalisation» de Cantor à l'ensemble des nombres algébriques. Fin de la démonstration.

Le résultat de Cantor est moins satisfaisant que celui de Liouville, car il est plus difficile de visualiser le nombre transcendant que l'on a construit (avec un petit effort, on précise toutefois que celui défini dans le paragraphe précédent commence par 0,555555), mais il est aussi beaucoup plus puissant. En effet, il établit que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable.

Or le procédé de diagonalisation (que l'on vient d'appliquer dans la deuxième partie de la démonstration) montre que l'infini des nombres réels, quant à lui, n'est pas dénombrable ; autrement dit, c'est un infini plus grand que celui des nombres algébriques. Il en résulte que la méthode de Cantor montre non seulement, presque aussi efficacement que la méthode de Liouville, qu'il existe des nombres transcendants à côté des nombres algébriques, mais aussi qu'il y en a infiniment plus : les nombres algébriques sont infiniment rares comparés aux transcendants.

Ce résultat paraît paradoxal : tous les nombres que l'on rencontre naturellement sont algébriques et pourtant, s'ils sont infiniment plus rares que les nombres transcendants, on devrait toujours rencontrer des nombres transcendants !

Ce paradoxe est levé lorsqu'on comprend que les nombres auxquels on pense naturellement sont tous simples (on pense à eux en en donnant une définition finie) ; or tous les nombres simples sont bien évidemment algébriques, puisque la notion de nombre algébrique est le résultat de l'élaboration de la notion de nombre *finiment définissable* qui, siècle après siècle, a été étendue.

L'apparent paradoxe provient d'une confusion entre deux modes d'accès différents aux nombres qui sont assimilés l'un à l'autre :
• *l'accès abstrait* (on imagine que l'on choisit un réel au hasard dans l'ensemble de tous les nombres réels que l'on a devant soi !) ; c'est lorsqu'on accède aux nombres réels abstraitement que les nombres transcendants sont majoritaires ;
• *l'accès concret par la définition* (on choisit la définition d'un nombre réel) ; dans ce cas, à cause de la nature négative de la définition des transcendants (les transcendants sont les nombres qui *ne* sont *pas* finiment définissables), on trouve – sauf efforts particuliers – des nombres algébriques.

Les raisonnements de Cantor, appliqués au problème de l'extension des nombres par la géométrie, montrent rétrospectivement qu'elle ne pouvait qu'échouer, et cela, même si l'on avait ajouté à la règle et au compas d'autres outils de dessin, comme on l'a proposé pour traiter des problèmes particuliers : quadratrice d'Hippias, strophoïde de Newton, cissoïde de Dioclès, pliages, outils spéciaux de trisection, etc. En effet, on montre facilement qu'avec un nombre fini (ou même infini dénombrable) d'outils ou de courbes annexes, les points qu'on atteint par construction géométrique finie forment un ensemble dénombrable, et ne sont donc pas tous les points du plan (car eux sont non dénombrables). Ajouter de nouvelles méthodes de construction permet bien évidemment d'étendre l'ensemble des points constructibles, mais ne rend jamais tous les points constructibles.

Charles Hermite (1822-1901).

La méthode géométrique d'extension des nombres ne pouvait pas aboutir (en tout cas, pas en respectant l'esprit des géomètres grecs). La géométrie devait laisser la place à l'analyse et à l'algèbre abstraite. Peut-être que les mathématiciens, en voulant s'appuyer trop longtemps et trop exclusivement sur la géométrie, ont perdu beaucoup de temps.

(c) Les nombres e et π sont transcendants

Ce n'est d'ailleurs pas la géométrie, mais les nouvelles disciplines mathématiques qui viendront à bout de la quadrature du cercle et de π. Le français Charles Hermite (1822-1901) fait la moitié du chemin en 1873 en établissant que le nombre e (dont nous avons détaillé la démonstration d'irrationalité) est transcendant.

Sa démonstration, moyennant de sérieuses complications, s'étend à π *(voir l'annexe 2, page 165),* mais c'est l'allemand Ferdinand von Lindemann (1852-1939) qui emporte le morceau en 1882. Après son exploit, Lindemann essayera toute sa vie de démontrer le grand théorème de Fermat. Il ne réussira pas et mourra plus d'un demi-siècle avant que la solution ne soit trouvée par Andrew Wiles, en 1993.

Ferdinand von Lindemann (1852-1939).

Il faut réaliser concrètement ce que signifie la transcendance de π : toute formule faisant intervenir des puissances de π, des entiers, des multiplications, des additions, des soustractions (et des parenthèses), aussi longue soit elle, ne vaut jamais 0. Sans faire aucun calcul, on peut donc affirmer que :

$$(2\pi^3 + 11) \times (3\pi^3 + 7\pi - 9) - (31\pi^3 - 39) \times (5\pi^3 - 6\pi) \neq 0$$

En fait, on peut même introduire tous les nombres algébriques que l'on veut dans les coefficients des équations, jamais on n'arrivera à zéro :

$$\frac{\left(\sqrt[5]{3}\,\pi^3 + \sqrt[7]{2}\right)}{\pi^3 + 8\pi - 11} - \left(\sqrt{33}\pi^9 - 3\right) \times \left(\pi^3 + \pi\right) \neq 0$$

Le nombre π n'est pas finiment définissable ; c'est un nombre qui cachait l'infini en lui et le mathématicien, pour débusquer ce subtil adversaire, s'est engagé de plus en plus loin, à la fois hors de la géométrie, mais aussi au-delà des entiers et de leur tranquille *infini dénombrable*. Ce n'est pas un hasard si, presque simultanément à la démonstration de la transcendance de π, Cantor annonce au monde dubitatif et méfiant des mathématiciens qu'il existe une *infinité d'infinis*. Ce n'est pas un hasard non plus si la démonstration établissant cette infinité d'infinis n'est qu'une adaptation assez simple du procédé de diagonalisation que Cantor a utilisé pour prouver l'existence d'une infinité majoritaire de nombres transcendants. Ce n'est pas un hasard, enfin, si cette démonstration, comme toutes celles que nous présentons ici, est fondée sur un raisonnement par l'absurde.

La conséquence majeure de la preuve de la transcendance de π est que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution : s'il en avait une, π serait exprimable par radicaux, et serait donc algébrique. Remarquons au passage que la théorie permet même de généraliser l'impossibilité de la quadrature d'un cercle par un carré en l'impossibilité de la quadrature d'un cercle par un rectangle : si on pouvait construire, à la règle et au compas, un rectangle dont la surface soit celle d'un cercle de rayon 1, alors les deux côtés du rectangle seraient définissables par radicaux, ainsi que leur produit π, et π serait donc algébrique.

La transcendance de π est l'un des plus beaux exemples de résultats mathématiques d'impossibilité : les plus connus sont l'irrationalité de $\sqrt{2}$, la non résolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, l'impossibilité de démontrer l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes de la géométrie euclidienne et, plus récemment, les preuves d'impossibilité en logique et en théorie de la calculabilité que Kurt Gödel et Alan Turing donnèrent à partir de 1931 *(voir le prochain chapitre)*.

En réalité, le résultat que Lindemann a démontré est plus général que la transcendance de π. Il a établi que, quels que soient les nombres algébriques $a(1), ..., a(n)$, $b(1), ..., b(n)$, avec $a(k) \neq 0$ et les $b(i)$ deux à deux distincts, on a : $a(1)\, e^{b(1)} + a(2)\, e^{b(2)} + a(3)\, e^{b(3)} + ... + a(n)\, e^{b(n)} \neq 0$ (on en déduit que si π était algébrique, $i\pi$ le serait aussi, et on ne pourrait avoir la fameuse relation due à Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$). La preuve de Lindemann sera simplifiée par Weierstrass, Hilbert, Hurwitz et Gordan.

Voici une des conséquences du résultat de Lindemann : si a est algébrique, alors e^a est transcendant ainsi que $\sin(a)$, $\cos(a)$, $\tan(a)$ lorsque $a \neq 0$, et que $ln(a)$ lorsque $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Pour e^a, on raisonne ainsi : supposons $b = e^a$ algébrique, alors l'équation $e^a - b = 0$ contredit le résultat de Lindemann. Pour $\sin(a)$, on utilise que $\sin(a) = (e^{ia} + e^{-ia})/2i$.

Du coup, tous les nombres suivants (parmi bien d'autres) sont transcendants :

$$e, \quad e^2, \quad e^{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{e}, \quad \ln(2), \quad \sin(1), \quad \cos(\sqrt{2}), \quad \tan((1 + \sqrt{5})/2)$$

(d) Le septième problème de Hilbert

Certains nombres intéressants, tel $2^{\sqrt{2}}$, échappent au résultat de Lindemann. C'est sans doute ce qui poussa David Hilbert à glisser, parmi les 23 problèmes qu'il posait en 1900 aux mathématiciens, celui-ci : prouver que si a est algébrique et b algébrique irrationnel, alors a^b est transcendant.

En 1919, le problème était resté sans solution. Hilbert pronostiqua alors que l'hypothèse de Riemann (une autre grande question liée aux nombres premiers) serait démontrée avant que $2^{\sqrt{2}}$ ne soit montré transcendant. Hilbert, malgré son génie, s'est trompé sur ce point : l'hypothèse de Riemann reste à ce jour indémontrée, alors que la solution de sa question sur les nombres transcendants fut obtenue indépendamment par A. Gelfond et Th. Schneider en 1934.

Les nombres suivants sont donc transcendants :

$$2^{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \qquad 7^{\sqrt[3]{2}} \qquad e^{\pi}$$

(pour e^{π}, on utilise que $e^{\pi} = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$).

En 1966, Alan Baker démontra un résultat qui généralise le précédent : si les $a(i)$ et les $b(i)$ sont des nombres algébriques non nuls et si le nombre $a(1) \ln b(1) + a(2) \ln b(2) + \ldots + a(n) \ln b(n)$ est non nul, alors il est transcendant. Les nombres suivants sont donc transcendants :

$$\ln(2) + \ln(3) \qquad \ln(5) \qquad \sqrt[3]{5} \times \ln(5)$$

En utilisant les résultats évidents suivants :
– la somme d'un nombre algébrique et d'un nombre transcendant est transcendant (de même pour le produit ou le quotient),
– une puissance rationnelle d'un nombre transcendant est un nombre transcendant,
on obtient encore d'autres nombres transcendants :

$$2 + \pi \qquad \sqrt[3]{5} \times (\ln(2) + \ln(3)) \qquad \sqrt{5} \times e^{\pi} \qquad \sqrt[3]{5} + \pi^2$$

$$\pi - 3{,}1415926 \qquad \frac{\sqrt{5}\ \ln(2) - 9\ln(3)}{\sqrt[7]{11}} \qquad \frac{\sqrt{\ln(10)}}{\sqrt{7}}$$

(e) Le nombre de Champernowne et quelques autres

En 1937, le mathématicien Kurt Mahler, qui avait reçu des injections de morphine après une opération, voulut se prouver que la drogue n'avait pas endommagé son cerveau. Il s'intéressa au nombre de Champernowne 0,12345678910111213... (que nous retrouverons au prochain chapitre) et réussit à prouver que ce nombre est transcendant, ce qui est en fait un cas particulier de son résultat plus général :

Si $P(X)$ est un polynôme non constant à coefficients entiers tel que $P(i)$ est entier pour tout entier $i \geq 1$, alors $0, P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)\ldots$ est transcendant.

Les nombres suivants sont donc transcendants :

0,12345678910111213141 5... $P(X) = X$

0,14916253649648110012 1... $P(X) = X^2$

0,51015202530354045505 5... $P(X) = 5X$

Le même Mahler prouva en 1953 que π n'est pas un nombre de Liouville. Son résultat a été amélioré par les frères Chudnovsky, qui ont montré que pour tout nombre rationnel p/q, si q est assez grand : $|\pi - p/q| > 1/q^{14,65}$

Autrement dit, si π est transcendant, ce n'est pas parce qu'il passe trop près des rationnels. On conjecture que 14,65 devrait pouvoir être remplacé par $2 + \varepsilon$.

Les frères Chudnovsky ont aussi montré que les nombres Γ(1/3), Γ(1/4), définis par : $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

et qui sont importants dans certaines branches de l'analyse, sont transcendants. En 1996, Y. Nesterenko, de l'Université de Moscou, et P. Philippon, de l'Université Paris VI, ont montré indépendamment que π, e^π et Γ(1/4) sont algébriquement indépendants : si P est un polynôme à trois variables à coefficients non tous nuls, alors $P(\pi, e^\pi, \Gamma(1/4))$ est non nul.

(f) Résultats expérimentaux

Concernant les rapports entre e et π, on ne sait pas grand chose. Nous avons juste vu que e^π est transcendant. Pour $e + \pi, e - \pi, e \times \pi, \pi / e$ et π^e, on ne sait même pas s'ils sont irrationnels.

R. Kannan et L. McGeoch ont montré que si $e + \pi$ était la solution d'une équation algébrique, alors la somme des carrés des coefficients de l'équation est au moins 25×10^{16}. Autrement dit, s'il existe une équation algébrique dont $e + \pi$ est racine, elle n'est pas simple !

D. Bailey a obtenu d'autres résultats par expérimentation. Par exemple, aucun des nombres $e + \pi$, e / π et ln(π) ne peut satisfaire une équation algébrique de degré inférieur à 8 avec un polynôme dont le carré des coefficients est inférieur à 10^{18}.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, ces résultats ne proviennent pas seulement de l'exploitation «stupide» de la puissance des machines, mais aussi de la mise au point d'algorithmes délicats (utilisant en particulier la transformation de Fourier rapide), qui sont d'ailleurs proches de ceux grâce auxquels P. Borwein, D. Bailey et S. Plouffe ont trouvé leur formule *(voir le chapitre précédent)*.

Les «calculateurs de π» et les «analyseurs de π» se retrouvent, et ce sont parfois les mêmes (D. Bailey, S. Plouffe, les frères Borwein, les frères Chudnovsky). L'informatique la plus avancée rejoint les mathématiques les plus abstraites. Pour comprendre l'infini, les machines finies que sont les ordinateurs sont d'une aide considérable. Inversement, l'infini mathématique aide à comprendre le fini et à en acquérir la maîtrise. Plus que jamais, l'unité du calcul et du raisonnement s'impose et triomphe.

Annexe 1 : les figures constructibles à la règle et au compas

En 1637, dans sa *Géométrie,* René Descartes donne, à partir de segments de longueur a et b, des constructions de segments de longueur $a + b$, $|a - b|$, $a \times b$, a / b, $\sqrt{a}$, et montre ainsi que l'on peut construire à la règle et au compas tous les segments qui s'expriment algébriquement à partir de segments de longueur donnée et de racines carrées (dont les longueurs sont des expressions par radicaux carrés des longueurs des segments donnés initialement). On conclut alors immédiatement que :

Tout point dont les coordonnées, dans un repère donné par trois points (O, A, B) avec $|OA| = |OB| = 1$ et OA orthogonal à OB, sont des expressions algébriques avec des radicaux carrés, est un point constructible à la règle et au compas.

La réciproque, que Descartes ne traite pas clairement, repose simplement sur l'étude des coordonnées des points d'intersection de cercles et de droites, dont les équations $ax + by + c = 0$ *(pour les droites)*, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ *(pour les cercles)* ont des coefficients définissables par radicaux carrés. Les coordonnées de ces points d'intersection, que ce soit dans le cas de deux droites, de deux cercles ou d'un cercle et d'une droite, sont les solutions d'équations du premier ou du deuxième degré, et sont donc encore définissables par radicaux carrés.

Précisons les définitions des points constructibles à la règle et au compas et des nombres définissables par radicaux carrés, et le résultat de caractérisation qui établit leur correspondance :

Définition : un point P du plan dans lequel est donné (O, A, B) (avec $|OA| = |OB| = 1$, OA orthogonal à OB) est *constructible à la règle et au compas* si, à partir des trois points O, A, B, et par un nombre fini étapes consistant :

- soit à tracer une droite dont deux points distincts sont déjà construits,
- soit à tracer un cercle dont le rayon r est la distance entre deux points déjà construits, et le centre un point déjà construit,

on réussit à obtenir successivement des points d'intersections $P_0, P_1, \ldots, P_n$ entre droites et cercles construits, tels que $P_n = P$.

Définition : un nombre réel x est *définissable par radicaux carrés*, s'il existe une suite finie de nombres réels $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p$ telle que chaque x_i est :

- soit un nombre entier ;
- soit de la forme $\sqrt{x_j}$ pour un $j < i$;
- soit de la forme $x_j + x_k$, ou $x_j - x_k$, ou $x_j \times x_k$, ou x_j / x_k avec $j < i, k < i$;

et telle que $x_p = x$.

Théorème de la géométrie de la règle et du compas : un point est constructible à la règle et au compas si et seulement si ses coordonnées sont définissables par radicaux carrés.

Pour terminer sur les constructions géométriques, voici quelques résultats amusants qui vous intéresseront peut-être *(vous trouverez des détails et d'autres résultats du même type dans le livre de Jean-Claude Carrega)*.

Chose étonnante, on peut se passer de la règle, car :

• tout point constructible à la règle et au compas est constructible avec le compas seul (théorème de Mohr-Mascheroni, 1672, 1797).

Quand on dispose seulement d'une règle et d'une «traceuse de parallèles» (un outil permettant de tracer une parallèle à une droite déjà tracée passant par un point déjà tracé, par exemple une équerre sans angle droit), on ne remplace pas le compas, car :

• un point est constructible à la règle et à la traceuse de parallèles si, et seulement si, ses coordonnées sont des nombres rationnels.

Une équerre à angle droit ne permet pas de faire mieux :

• un point est constructible à la règle et à l'équerre à angle droit si, et seulement si, ses coordonnées sont des nombres rationnels.

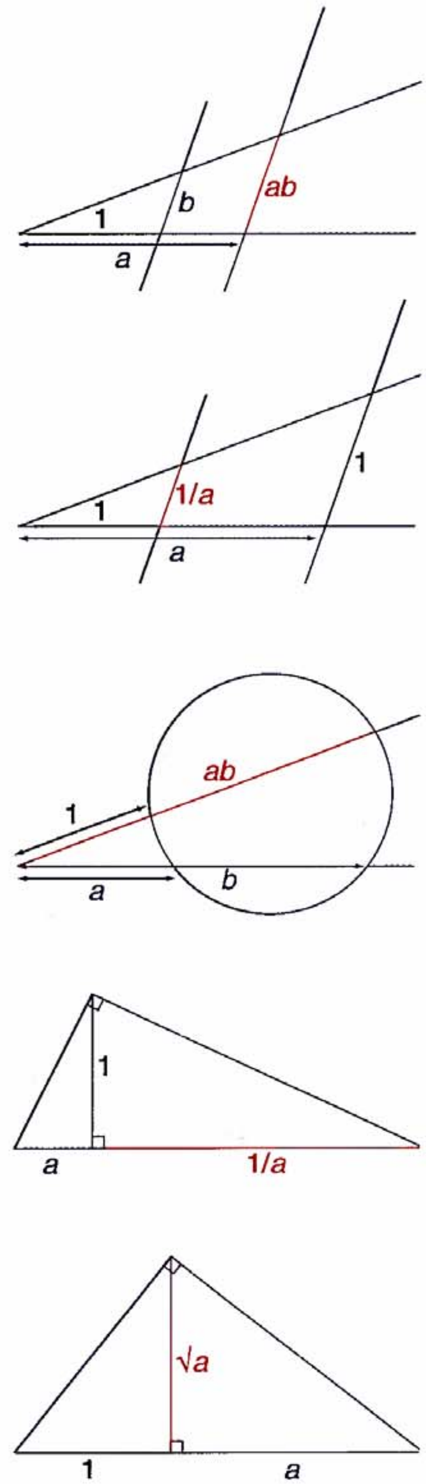
Quand un cercle est déjà tracé dans le plan et qu'on ne dispose que d'une règle, tout s'arrange :

• un point est constructible à la règle et en utilisant un cercle donné si, et seulement si, ses coordonnées sont définissables par radicaux carrés (théorème de Poncelet-Steiner, 1833).

Pour ces trois derniers théorèmes, on autorise l'utilisation de points arbitraires intermédiaires (parfois nommés *points catalyseurs*), à condition que les points retenus à la fin de la construction ne dépendent pas de ces points intermédiaires.

Annexe 2 : démonstration de la transcendance de e et de π

Voici les preuves de la transcendance de e et de π, aboutissement des simplifications apportées par Weierstrass, Hilbert, Hurwitz et Gordan aux travaux de Hermite et Lindemann. Nous avons suivi le livre de A. Baker, dont les preuves sont d'une admirable concision, ce qui, malheureusement, ne les rend pas faciles pour autant (aucune preuve facile n'a pour l'instant été trouvée). Même si vous ne pouvez pas en suivre chaque détail, il est intéressant de voir l'architecture globale de la démonstration qui apparaît clairement ici, ainsi que le type d'arguments et d'objets requis pour prouver ces résultats clefs des mathématiques.



Construction, à la règle et au compas, de segments de longueur *ab*, 1/*a* et √*a* à partir de segments de longueur 1, *a* et *b*.

Théorème : le nombre e est transcendant.

Démonstration : observons d'abord que si $f(x)$ est un polynôme à coefficients réels de degré m, et si :

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\, du$$

alors, par intégration par parties répétée, on obtient :

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \qquad (1)$$

Si $f^*(x)$ désigne le polynôme f dans lequel on a remplacé chaque coefficient par sa valeur absolue, alors :

$$|I(t)| \leq \int_0^t \left|e^{t-u} f(u)\right| du \leq |t|\, e^{|t|} f^*(|t|) \qquad (2)$$

Supposons maintenant que e est algébrique, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $n > 0, q_0 \neq 0$, et $q_1, ..., q_n$ tels que :

$$q_0 + q_1 e + ... + q_n e^n = 0 \qquad (3)$$

Nous allons comparer dans la suite deux estimations différentes de $J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + ... + q_n I(n)$, où $I(t)$ est défini comme précédemment, avec $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p ... (x-n)^p$, p désignant un grand entier premier. De (1) et (3), nous tirons :

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k)$$

où $m = (n+1)p - 1$. Il est clair que $f^{(j)}(k) = 0$ si $j < p$ et $k > 0$, ou si $j < p - 1$ et $k = 0$. Donc, pour tout j, k autres que $j = p - 1$, $k = 0$, $f^{(j)}(k)$ est un entier divisible par p !. En outre :

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!\,(-1)^{np}(n!)^p$$

et donc, pour $p > n$, $f^{(p-1)}(0)$ est un entier divisible par l'entier $(p-1)!$ mais pas par l'entier p !. Il en résulte que, si on prend $p > |q_0|$, alors J est un entier non nul divisible par $(p-1)!$, et donc $|J| \geq (p-1)!$.

Toutefois la majoration évidente $f^*(k) \leq (2n)^m$, utilisée avec (2), donne l'inégalité :

$$|J| \leq |q_1|\, e f^*(1) + ... + |q_n|\, n e^n f^*(n) \leq c^p$$

pour une certaine constante c indépendante de p. Lorsque p est suffisamment grand, les deux inégalités concernant $|J|$ se contredisent, ce qui démontre le théorème.

Théorème : le nombre π est transcendant.

Démonstration : supposons le contraire, c'est-à-dire que π est algébrique. Alors $\theta = i\pi$ est aussi algébrique. Supposons que l'équation dont θ est la solution est de degré d. Notons $\theta_2, ..., \theta_d$ les autres solutions de l'équation, ce qui conduit à écrire $\theta = \theta_1$. Notons aussi L le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme minimal de θ (c'est-à-dire du polynôme non décomposable en facteurs et dont les coefficients sont premiers entre eux). En utilisant l'équation d'Euler, $e^{i\pi} = -1$, on obtient que :

$$\left(1 + e^{i\theta_1}\right)\left(1 + e^{i\theta_2}\right)\ldots\left(1 + e^{i\theta_d}\right) = 0$$

Le produit correspondant au côté gauche de l'égalité peut être écrit, après développement, comme la somme de 2^d termes e^{Θ}, où :

$$\Theta = \varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \ldots + \varepsilon_d\theta_d, \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1$$

Supposons que n des nombres Θ sont non nuls et notons les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a donc :

$$q + e^{\alpha_1} + \ldots + e^{\alpha_n} = 0 \qquad (4)$$

où q est l'entier $2^d - n$.

Nous allons maintenant comparer deux estimations différentes de $J = I(\alpha_1) + \ldots + I(\alpha_n)$, où $I(t)$ est défini comme dans la démonstration de la transcendance de e, avec cette fois : $f(x) = L^{np}x^{p-1}(x-\alpha_1)^p \ldots (x-\alpha_n)^p$, p désignant à nouveau un nombre premier (que nous serons amenés à prendre grand pour la conclusion). De (1) et (4), nous tirons :

$$J = -q\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}\left(\alpha_k\right)$$

où $m = (n + 1)p - 1$. La somme sur k est un polynôme symétrique en $L\alpha_1, \ldots, L\alpha_n$ (ce qui signifie invariant par permutation de ces nombres) à coefficients entiers. Il résulte alors du théorème d'algèbre sur les polynômes symétriques (théorème qui indique que tout polynôme symétrique en $x_1, \ldots, x_n$ s'exprime comme un polynôme des coefficients de l'équation dont $x_1, \ldots, x_n$ sont racines) que la somme sur k est un nombre entier. En outre, puisque $f^{(j)}(\alpha_k) = 0$ quand $j < p$, ce nombre est divisible par p !. On remarque que $f^{(j)}(0)$ est aussi un rationnel divisible par p ! quand $j \neq p - 1$, et que $f^{(p-1)}(0) = (p-1)!\,(-L)^{np}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^p$ est un nombre entier divisible par $(p - 1)$! mais pas par p ! si on prend un p assez grand. Il en résulte que si $p > q$, on a $|J| \geq (p-1)!$

Or, de (2), on tire :

$$|J| \leq |\alpha_1| e^{|\alpha_1|} f^*(|\alpha_1|) + \ldots + |\alpha_n| e^{|\alpha_n|} f^*(|\alpha_n|) \leq c^p$$

pour une certaine constante c indépendante de p. Les deux inégalités concernant $|J|$ sont incompatibles quand p est choisi assez grand, ce qui prouve le théorème.

Compléments bibliographiques :

Pour vous guider dans la littérature, voici quelques points de repère (les références complètes des ouvrages sont indiquées dans la bibliographie générale à la fin du livre, page 215).

- Baker : c'est le livre qui nous a servi de base pour la preuve présentée ici. Il contient la démonstration de presque tous les résultats mentionnés dans ce chapitre. Nous le recommandons à tous ceux qui souhaitent approfondir le sujet de la transcendance.

• Berggren, Borwein et Borwein : on y trouvera les articles originaux de Hermite, Lindemann, et les perfectionnements de Weierstrass et Hilbert.
• Jones, Moris et Pearson : leur présentation des preuves de la transcendance de e et de π redémontre tout ce qui n'est pas absolument élémentaire. Très soignée, mais le tout occupe 46 pages.
• Carrega : contient une démonstration en français qui explicite, plus en détail qu'ici, chaque pas de la preuve de la transcendance de π.
• Lang : la preuve donnée de la transcendance de π est plus abstraite qu'ici, mais aboutit à d'autres résultats (par exemple à ceux de Gelfond-Schneider).
• Hardy et Wright : un grand et excellent classique sur l'irrationalité, la transcendance et, plus généralement, sur la théorie des nombres.
• Le Petit Archimède : décrit les preuves originales de Hermite et Lindemann.
• Borwein et Borwein : on y trouvera beaucoup des résultats mentionnés dans ce chapitre. Ces résultats sont formulés sous forme d'exercices aux énoncés très soigneusement détaillés.

π est-il aléatoire ?

Le désordre et la complexité

10

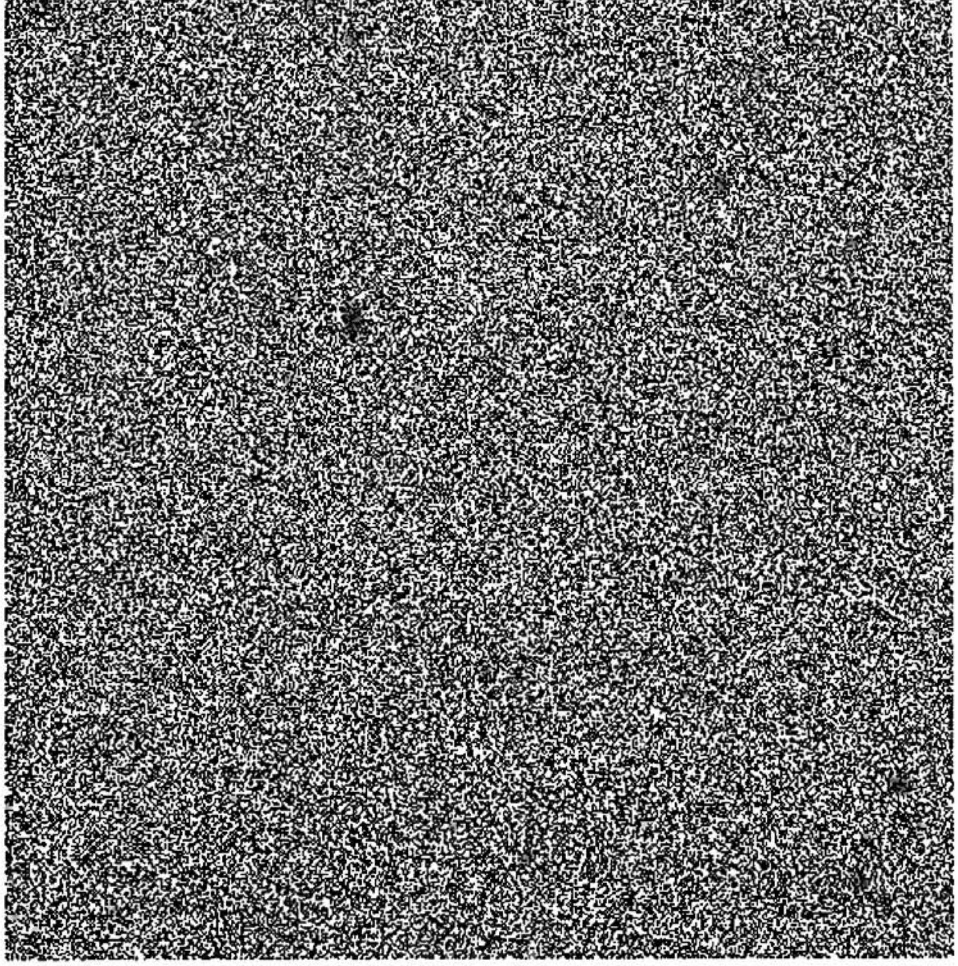
Que π soit transcendant n'implique pratiquement rien quant à la suite de ses décimales. Aussi, chaque fois qu'ils battent un record, les chasseurs de décimales, fiers d'être les premiers à explorer une nouvelle parcelle de l'univers infini de π, soumettent leurs résultats à des tests statistiques de toutes sortes. Or ils n'ont rien trouvé de remarquable : si quelques singularités sont parfois signalées, elles ne sont malheureusement jamais confirmées (soit parce que les décimales apparaissent erronées, soit parce qu'en allant plus loin, on découvre que la singularité disparaît). Les décimales de π, à ceci près qu'elles sont les décimales de π, se présentent comme des chiffres tirés au hasard, ce qu'on ne sait ni démontrer ni comprendre ! Nous sommes conduits à nous interroger sur ce qu'est le hasard, et sur la définition d'une suite de décimales statistiquement quelconque, complexe, imprévisible, incompressible, etc. L'aide de la théorie de la calculabilité est alors essentielle, mais, malgré la nouvelle compréhension qu'elle procure, nous restons confrontés à un grand nombre de questions simples, profondes et irrésolues ; ces questions justifient sans doute que de brillants mathématiciens, tels que les frères Chudnovsky, participent à la quête éperdue des chiffres de π.

Anomalies?

En étudiant les décimales qu'ils venaient d'obtenir, les calculateurs de π ont régulièrement noté certaines étrangetés dont voici une liste, sans doute non exhaustive *(voir le chapitre 2 pour des remarques plus anecdotiques sur ce thème)*.

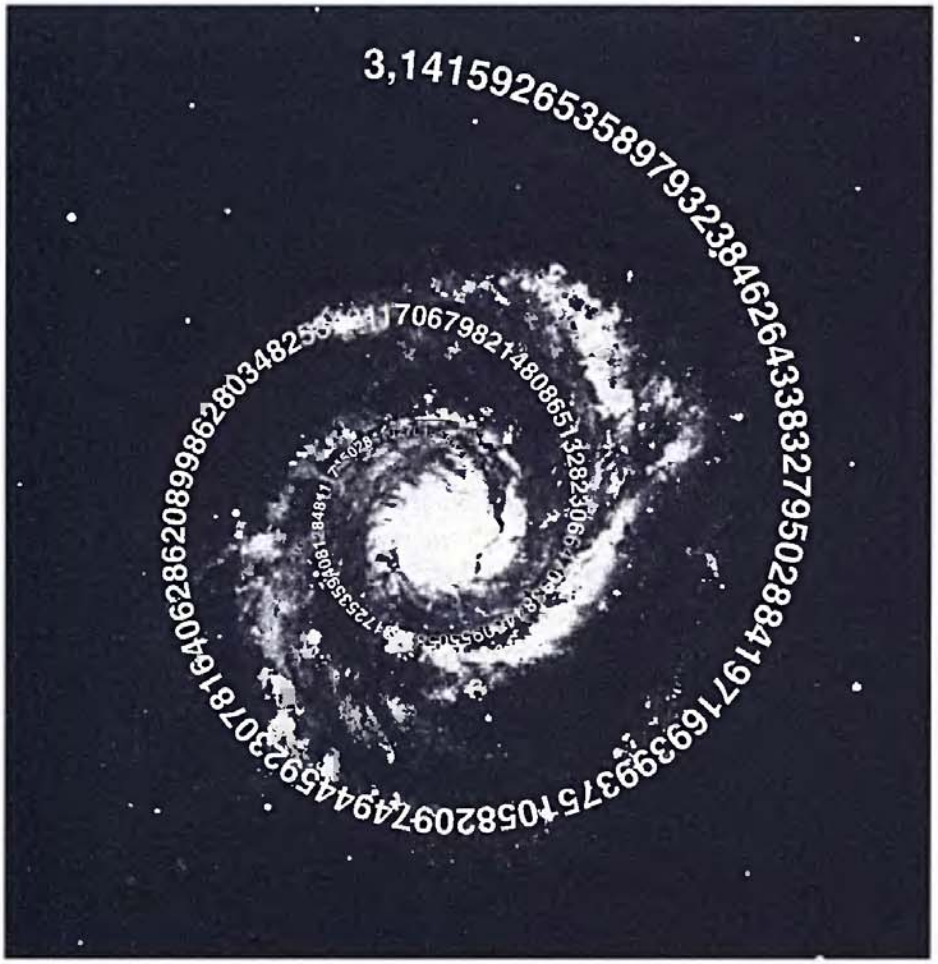
• Rareté des «0» dans le tout début de la suite. Le premier «0» n'apparaît qu'en position 32, et il n'y a que deux «0» dans les 50 premières décimales de π. Toutefois, dans les 100 premières, il y a en a déjà 8, et dans les 200 premières, il y en a 19. Plus loin encore, on trouve 999 440 «0» dans les dix premiers millions de décimales, puis 599 963 005 «0» dans les six premiers milliards de décimales de π ; la proportion de «0» reste légèrement en dessous des 1/10 attendus, mais d'une manière de plus en plus insensible et, finalement, non significative.

Cette image résulte du codage des 262 144 premiers chiffres binaires de π, rangés de gauche à droite et du haut vers le bas en 512 lignes de 512 points, chaque «0» donnant un point noir et chaque «1» un point blanc. Elle a été réalisée par Elias Bröms. Contient-elle quelque chose de remarquable ?



• Rareté des «7». Dans les 500 premières décimales, on en trouve 36, ce qui semble bien peu ; dans les 1 000 premières décimales, il y a 95 «7», et il n'en «manque» donc plus que cinq ; dans les dix premiers millions de décimales de π, on trouve 1 000 207 «7», et dans les six premiers milliards, 600 009 044 «7». Le manque initial est devenu un léger surnombre, que l'on trouverait parfaitement banal s'il s'agissait de chiffres choisis au hasard.

• Présence de séquences répétées étonnantes. La présence de la séquence 999999 entre les positions 762 et 767 est inattendue. Dans les deux premiers milliards, on trouve aussi une séquence de huit «8» consécutifs, une séquence de neuf «7» consécutifs, et même une séquence de dix «6» consécutifs, ainsi que la séquence «123456789». Toutefois ce sont là des phénomènes isolés dont la probabilité n'est pas négligeable dans une suite tirée au hasard. Il n'y a donc pas à rechercher d'explication : les tests plus systématiques *(voir le paragraphe suivant)* ne décèlent rien de remarquable dans la fréquence des séquences répétées.



En raison des contraintes liées à la physique de notre monde (taille des électrons, taille de l'Univers visible, vitesse de la lumière, etc.), certains évaluent que jamais plus de 10^{77} décimales de π ne pourront être calculées, et cela même si l'humanité se consacrait entièrement à cette tâche pendant des siècles en utilisant tout l'espace, toute la matière et toute l'énergie disponible.

Les frères Chudnovsky ont remarqué que la moyenne des n premières décimales, que l'on s'attend à trouver proche de 4,5 puisque c'est la moyenne des dix chiffres ($[0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9]/10 = 4{,}5$), est d'abord légèrement supérieure à cette valeur dans le premier milliard, puis légèrement inférieure dans le deuxième ; toutefois ils hésitent à considérer ce phénomène comme significatif. Ils expliquent aussi que l'«observation» de π – parfois réalisée en associant aux chiffres de π des graphiques tridimensionnels en forme de surfaces – donne «le sentiment de quelque chose de systématique, dont nous ne savons pas s'il a une origine véritable dans π, ou s'il résulte seulement d'un travail que fait le cerveau pour organiser des structures désordonnées» ; les paysages obtenus par les Chudnovsky leur semblent différents de ce que produirait le simple hasard, sans qu'ils puissent en tirer de constatations certaines : «Il y a moins de pics et moins de vallées que l'on s'attendrait à en trouver si π était vraiment aléatoire.» Leur conclusion est que, malgré ce sentiment vague, et puisque rien de clair n'a été prouvé pour l'instant, il faut aller voir plus loin.

Les frères Chudnovsky espèrent que les régularités, dont ils semblent persuadés de l'existence, ne se présenteront pas trop loin, et en tout cas pas au-delà de ce que nos machines du futur pourront calculer. Ils évaluent en effet – en prenant pour base la taille de l'Univers visible – que l'on ne pourra jamais dépasser 10^{77} chiffres de π (ce qui nous laisse encore de la marge, puisque nous en sommes à 5×10^{10}) : «Si π ne montre aucun comportement systématique avant l'emplacement 10^{77}, ce serait vraiment un désastre, mais il ne faudrait pas renoncer pour autant ; il doit bien y avoir un moyen de sauter par-dessus la barrière». Ce moyen est sans doute à rechercher dans de nouveaux résultats de mathématiques pures, et la nouvelle formule de calcul de π de P. Borwein, D. Bailey et S. Plouffe *(présentée au chapitre 8)* en est peut-être le signe annonciateur.

Le nombre π soumis aux tests

En 1995, Y. Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π. En prenant les six premiers milliards, on dénombre les quantités suivantes de «0», de «1», etc. :

«0» : 599 963 005	«5» : 600 017 176
«1» : 600 033 260	«6» : 600 016 588
«2» : 599 999 169	«7» : 600 009 044
«3» : 600 000 243	«8» : 599 987 038
«4» : 599 957 439	«9» : 600 017 038

La vitesse avec laquelle les fréquences des chiffres approchent de 1/10 est conforme à ce que l'on obtiendrait par un tirage au hasard équitable. L'écart doit diminuer comme $1/\sqrt{n}$, ce que l'on vérifie, par exemple, avec la fréquence du «7», égale à :

0	dans les	10 premières décimales
0,08	dans les	100 premières décimales
0,095	dans les	1 000 premières décimales
0,097	dans les	10 000 premières décimales
0,1002	dans les	100 000 premières décimales
0,0998	dans les	1 000 000 premières décimales
0,1000207	dans les	10 000 000 premières décimales
0,1000028	dans les	6 000 000 000 premières décimales

Avec dix millions de décimales de π, on engendre deux millions de séries de cinq chiffres, que l'on peut assimiler à des mains de poker. On calcule aisément le nombre statistiquement attendu de certaines configurations de poker pour des mains tirées au hasard (si on jouait avec un jeu ayant dix sortes de cartes au lieu de 13). On s'aperçoit alors que les mains de poker tirées des décimales de π ont des fréquences proches de celles que l'on obtiendrait par de véritables tirages aléatoires :

	nombre attendu	nombre trouvé
5 décimales distinctes	604 800	604 976
2 décimales identiques (une paire)	1 008 000	1 007 151
Deux paires	216 000	216 520
3 décimales identiques (brelan)	144 000	144 375
Un full (paire + brelan)	18 000	17 891
Un carré	9 000	8 887
5 décimales identiques	200	200

Parmi les méthodes utilisées pour repérer des anomalies statistiquement significatives dans la suite des décimales de π, citons :
• le calcul de la fréquence des 100 paires de chiffres : 00, 01, 02, ..., 99 ; le calcul de la fréquence des 1 000 triplets de chiffres, etc.
• la recherche de longs mots présents au moins deux fois dans les 51 milliards de décimales connues (la probabilité de trouver deux fois une séquence de 20 chiffres est extrêmement faible), à des emplacements éventuellement distants, ce qui nécessite des algorithmes particuliers.
• le découpage de la suite des chiffres en petits paquets (de 100, 1000, etc.) et le test de chacun d'eux (fréquence des chiffres, des paires, etc.).
• la recherche et le décompte des répétitions côte à côte du même chiffre, ou de la même paire, etc.
• le calcul de moyennes diverses et la réalisation de tests plus complexes, utilisés en statistique pour repérer des régularités dans les données.
• le calcul pour chaque chiffre, dans une séquence donnée, de l'écart type à la moyenne attendue si les chiffres étaient tirés au hasard, et le calcul de la probabilité que la fréquence de ce chiffre ait un écart type du même ordre de grandeur dans une suite véritablement tirée au hasard. On obtient des probabilités telles que : 70 pour cent, 90 pour cent, 81 pour cent, etc., c'est-à-dire rien qui justifie un véritable étonnement, et rien qui nécessiterait une explication s'il s'agissait de chiffres tirés au hasard.

Le nombre π n'a aucune raison d'être aléatoire

Chaque nouveau test sur le comportement des décimales de π conduit à la conclusion invariable qu'elles sont analogues à une suite de chiffres tirés au hasard. Une telle conclusion ne surprend plus personne aujourd'hui, car elle ne fait que confirmer ce que l'on trouve avec constance depuis plusieurs dizaines d'années. Toutefois l'ensemble de ces résultats n'est en rien évident, et va même à l'encontre de notre compréhension de π. En effet :

(a) Ce qui est prouvé au sujet des chiffres de π n'implique rien de tel : π n'est pas un nombre choisi *au hasard*, c'est un nombre parfaitement déterminé et exceptionnel.

(b) Dans certains systèmes de représentation, l'écriture de π n'est pas aléatoire ; il est donc impossible de soutenir que π est *intrinsèquement aléatoire* et doit se présenter aléatoirement dans tout système de représentation.

Reprenons ces deux points plus en détail.

(a) Ce qui est prouvé sur les chiffres de π : l'étude mathématique de π nous a appris qu'il est irrationnel *(voir le chapitre 9)*, et donc que ses décimales ne constituent pas une suite périodique à partir d'un certain chiffre. En revanche, un grand nombre d'autres régularités restent possibles, telles que les suivantes :

• Ne plus comporter un chiffre donné à partir d'un certain rang.
• Se terminer par 0100111000011111000000111... (un «0», suivi de deux «1», puis de trois «0», puis de quatre «1», etc.).
• Ne plus comporter que des «5» et des «6» à partir d'un certain rang ; par exemple :

556565665565655566565666556565...

• Être composé uniquement de bouts d'au moins cinq chiffres de la séquence 0123456789 à partir d'un certain rang ; par exemple :

345678 012345 23456 23456789 456789

• Ne comporter que des séquences palindromiques d'au moins trois chiffres à partir d'un certain rang ; par exemple :

6886 23432 1987891 363 34567876543

• Être tel que la fréquence des «0» tende vers 100 pour cent, et donc que tous les autres chiffres aient une fréquence s'approchant peu à peu de 0 pour cent.
• Être tel qu'à partir d'un certain rang, chaque séquence qui apparaît soit répétée au moins 1 000 fois, avant de changer.

Rien de tout cela n'est exclu pour l'instant, et le fait que π soit transcendant n'a pas de conséquences connues (en dehors de celles déjà tirées de l'irrationalité) sur les propriétés de la suite de ses décimales.

En revanche, la démonstration que π n'est pas un nombre de Liouville implique que les séquences de «0» dans l'écriture décimale de π ne sont pas trop longues. Plus précisément, le fait, démontré par les frères Chudnovsky, que pour tout nombre rationnel p/q, si q est assez grand, $|\pi - p/q| > 1/q^{14,65}$, exclut que l'on trouve une infinité de fois une séquence de 15 n «0» consécutifs à partir du rang n. Par exemple, il est impossible que l'on ait simultanément :

– 15 000 zéros consécutifs à partir du rang 1 000, et ;
– 15×10^6 zéros consécutifs à partir du rang 10^6, et ;
– 15×10^9 zéros consécutifs à partir du rang 10^9, etc.

Cette contrainte paraît très faible !

En 1973, M. Mignotte a démontré le résultat suivant : pour tout nombre rationnel p/q avec $q > 1$, $|\pi - p/q| > 1/q^{20,6}$.

Par conséquent, il est impossible qu'à partir du rang 10, il y ait par exemple 210 zéros consécutifs. Impossible aussi qu'à partir du rang 100, il y ait 2 100 zéros consécutifs, etc.

De façon plus générale, les résultats des frères Chudnovsky et de M. Mignotte interdisent certaines répétitions trop longues d'une même séquence dans π. Toutefois, là encore, ces contraintes effectivement démontrées apparaissent dérisoires comparées à celles que l'on observe sur les décimales calculées.

(b) L'écriture de π selon certains systèmes de représentation n'est pas aléatoire.

Certains soutiennent, de manière abusive, que l'on ne doit pas s'étonner de l'apparence aléatoire des décimales de π, sous prétexte que π, ayant une définition sans rapport avec la base 10, n'aurait pas de raison de montrer des régularités en base 10.

Or π n'a, semble-t-il, aucun rapport non plus avec les bases 2 et 16, et pourtant on a fini par découvrir (en 1995 !) une formule qui conduit à des propriétés particulières du développement de π en base 2 et 16 : ce développement est calculable point par point sans nécessiter plus de ln*(n)* mémoires *(voir le chapitre 8)* ; ce qui vient de se produire pour la base 2 (et va peut-être conduire à la démonstration des propriétés spéciales du développement binaire de π) pourrait se produire demain pour la base 10.

Quant à l'idée que π serait *intrinsèquement aléatoire*, elle ne tient pas non plus, car π possède des représentations régulières. Chaque formule de série infinie *(voir, au chapitre 4, toutes les formules découvertes aux XVIIe et XVIIIe siècles)* peut être interprétée comme un développement régulier de π . Au chapitre 6, nous avons indiqué que π, dans la base à pas variable [1/3, 2/5, 3/7, ...], s'écrivait simplement 2,2222222... C'est le principe de l'algorithme compte-gouttes, qui n'est en définitive qu'un algorithme de conversion de cette base à pas variable vers la base [1/10, 1/10, 1/10, ...].

Voici un autre type de développement standardisé des nombres réels conduisant à une représentation extrêmement simple de π. On montre (en utilisant le fait que les séries des termes pairs et impairs sont divergentes) que tout nombre réel x peut s'écrire sous la forme :

$$x = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} a_k = 4\left(a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{5}a_2 - \frac{1}{7}a_3 + \cdots\right)$$

où chaque a_i vaut 0 ou 1.

Exemple : 24/5 = 4(1 + 1/5), et on prend donc $a_0 = a_2 = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \neq 0, i \neq 2$.

Un tel développement $[a_0\ a_1\ ...]$ de x est une forme de développement binaire. Cette écriture n'est pas nécessairement unique, mais on

peut supprimer ce défaut, car tout nombre réel x s'écrit de manière unique sous la forme précédente quand on impose les règles suivantes :
• $a_{2i} = 1$ si, et seulement si, la somme partielle obtenue avec les a_j pour $j < i$ est inférieure à x.
• $a_{2i+1} = 1$ si, et seulement si, cette somme partielle est supérieure à x.
(ces conditions fournissent d'ailleurs un algorithme simple de conversion de tout nombre réel sous la forme indiquée).

Ce développement unique de tout nombre réel x pourrait s'appeler le *développement de Madhava-Gregory-Leibniz* d'un nombre, et n'est pas vraiment plus absurde que le développement en base 10, même s'il est assez malcommode d'utilisation (en particulier pour les opérations élémentaires de somme et de produit).

Avec une telle définition, le nombre 0 admet le développement [0000000...], et π admet le développement [1111111...] (d'après la formule de Madhava-Gregory-Leibniz). Les nombres 0 et π sont donc, pour le développement de Madhava-Gregory-Leibniz, les deux nombres réels les plus simples ! Par conséquent, le fait que les décimales de π se comportent comme une suite de chiffres tirés au hasard est réellement étonnant et demande à être prouvé et expliqué.

Le nombre π est-il simple ?

Qualifier π de *simple* est de prime abord un peu choquant. Un nombre simple est un nombre dont on peut formuler des définitions courtes. Bien sûr, 5 ou $\sqrt{2}$ sont simples, mais π, qui possède de multiples définitions courtes, doit lui aussi être considéré comme simple. Une version mathématique de cette idée est à la base de la notion de complexité de Kolmogorov, que nous évoquerons un peu plus loin.

Pour l'instant, remarquons que si l'on cherchait naïvement les séries convergentes les plus simples, on retiendrait certainement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$$

Or la première converge vers $\pi^2/6$, la deuxième vers 2, la troisième vers ln(2) et la quatrième vers e. En cherchant un peu plus, on trouverait rapidement la série de *Madhava-Gregory-Leibniz* et de nombreuses autres séries convergeant vers π ou vers des nombres faisant intervenir π. Ce n'est pas un hasard, car π se retrouve dans toutes sortes de situations mathématiques.

Que le nombre π ne soit pas la solution d'une équation algébrique n'empêche pas qu'il soit simple.

Quant à savoir si π est plus simple que 2, ln(2), e, π^2 ou $\sqrt{\pi}$, il est clair que la question n'a pas grand sens, car il est impossible de définir

Selon la façon dont on le regarde, π apparaît aléatoire ou non. En base 10, il présente toutes les apparences du hasard. En le regardant d'une autre façon, par exemple dans certaines bases à pas variable, il apparaît très simple. Avec ce stéréogramme dû à l'artiste japonais Jun Oi, la situation est analogue : le dessin semble sans intérêt et pourtant, quand on le regarde en louchant (on colle son visage sur la feuille et on l'éloigne progressivement), on voit apparaître de l'ordre : une sphère, une pyramide et un cône.

des critères objectifs permettant de mesurer cette simplicité, qui soient indépendants de nos systèmes de notation mathématique et du degré d'avancement de notre savoir. Reste le sentiment, que l'on ressent avec force en parcourant les pages d'un formulaire mathématique, que π est partout ; cette ubiquité le désigne comme un nombre fondamental, possédant de nombreuses définitions différentes, dont certaines sont parmi les plus élémentaires que l'on puisse imaginer pour un nombre.

Cryptographie

Comprendre ce qui se passe pour π en numération décimale ou binaire demande des études spécifiques, et il faut s'interroger sur les procédés de changement de base, c'est-à-dire sur *la capacité des méthodes arithmétiques simples à simuler le hasard*.

Cette approche est celle de la cryptographie, discipline où l'on recherche notamment les procédés les plus élémentaires engendrant des suites de nombres ayant toutes les apparences du hasard, et dont on ne puisse reconnaître l'origine que très difficilement. Certaines méthodes déjà proposées semblent satisfaire ces demandes, mais les démonstrations que ces méthodes possèdent de bonnes propriétés de simulation de l'aléatoire s'appuient le plus souvent sur des conjectures non démontrées de la théorie de la complexité. En outre, ces démonstrations ne s'appliquent pas aux procédés qui engendrent les décimales de π. Étant donné les difficultés de ce domaine de recherche, la démonstration que le développement décimal de π possède certaines propriétés des suites aléatoires, si toutefois elle est possible, ne sera pas facile.

Notons encore à ce sujet que le développement de π en fraction continue régulière *(voir le chapitre 4)* paraît également quelconque. Le nombre $\sqrt{2}$ possède un développement en fraction continue régulière très simple : [1, 2, 2, ...], et pourtant ce nombre irrationnel présente un développement décimal ayant, comme celui de π, toute l'apparence du hasard. On voit par cet exemple que la connexion entre les deux types de développement est difficile à établir : même si on réussissait à en savoir un peu plus sur le développement en fraction continue régulière de π, on n'en tirerait pas forcément de quoi avancer sur son développement décimal (et réciproquement).

Quelles que soient les difficultés de ce domaine, avant de conclure des échecs passés que l'on ne trouvera jamais rien au sujet des décimales de π, et que ce nombre est aléatoire (ce qui est aujourd'hui l'attitude étrange de nombreux mathématiciens), il faut se souvenir de la prétendue évidence que les chiffres binaires de π ne peuvent pas être calculés indépendamment les uns des autres : on soutenait que cette impossibilité était naturelle, quoique très difficile à prouver, jusqu'à ce que l'on découvre qu'elle était fausse, et que cela se voyait assez facilement !

Il n'y a rien de stupide à poursuivre le calcul de π et à tenter de prouver des propriétés générales de ses décimales, car il est impossible de pronostiquer sérieusement quoi que ce soit à partir des connaissances actuelles. Comprendre le rapport entre le *déterminé* (π est déterminé car c'est π !) et *le hasard* conduit à comprendre ce que signifie le terme «aléatoire» : à travers π, on aborde les questions les plus profondes des mathématiques et de la philosophie des sciences.

Les nombres statistiquement aléatoires

Pour aller plus loin dans la compréhension des rapports de π avec l'aléatoire, il nous faut réfléchir à ce qu'est une suite de chiffres tirés au hasard.

Les suites de chiffres engendrées par des tirages au sort équitables ne peuvent pas être trop ordonnées : des tirages au sort équitables ne donnent le résultat 0 0 0 0 ... qu'avec une probabilité nulle.

La difficulté est que, quelle que soit la suite précise que l'on se donne, elle aura aussi une probabilité nulle. Pour s'en sortir, il faut faire appel à la théorie de la calculabilité. Le prochain paragraphe indique qu'une suite est aléatoire au sens de Martin-Löf si elle possède toutes les propriétés *effectivement vérifiables* qui ont une probabilité 1 d'être observées. Nous ne nous occuperons pas pour l'instant de ce que veut dire *effectivement vérifiable* ; en revanche, nous allons examiner les propriétés les plus simples qui sont vérifiées avec une probabilité 1.

(a) Les nombres-univers

Dans une suite infinie de chiffres choisis au hasard, pour peu que chaque chiffre ait une probabilité non nulle d'être tiré, *tout arrive*, c'est-à-dire toute séquence possible apparaît tôt ou tard. De telles suites sont nommées *suites-univers*, et les réels dont la suite des décimales est une telle suite-univers sont nommés *nombres-univers en base 10* (la définition s'adapte bien sûr à toute base).

Le nombre de Champernowne 0,1234567891011121314... est un nombre-univers en base 10 : une suite finie donnée s de chiffres ne commençant pas par zéro y apparaît quand arrive le nombre entier dont l'écriture est s ; si la suite s commence par zéro, on attend l'entier $n = 1s$. De même, le nombre 0,248163264128... (les puissances de 2 écrites en base 10 les unes derrière les autres) est un nombre-univers en base 10, mais c'est moins facile à démontrer. On connaît de nombreux procédés pour construire des nombres-univers, et on sait qu'il en existe une infinité non dénombrable. Bien que l'on sache qu'il y a aussi une infinité non dénombrable de nombres qui ne sont pas des nombres-univers, on montre que *presque* tous les nombres sont des nombres-univers (et cela dans toute base).

Le «presque» n'est pas ici celui de la théorie des ensembles, où «presque» signifie «tous, sauf une infinité dénombrable», mais celui de la théorie de la mesure, où «presque» signifie «tous, sauf ceux d'un ensemble E de *mesure nulle,* c'est-à-dire d'un ensemble E que l'on peut, quel que soit $\varepsilon > 0$ fixé, enfermer dans une réunion d'intervalles ouverts dont la longueur totale est inférieure ou égale à ε».

(Tout ensemble dénombrable $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ est de mesure nulle, car on peut l'enfermer dans la réunion des intervalles $]a_n - \varepsilon/2^{n+1}, a_n + \varepsilon/2^{n+1}[$ dont la longueur totale est $\varepsilon/2^1 + \varepsilon/2^2 + ... = \varepsilon$).

Lorsque l'on réfléchit aux propriétés des nombres-univers, on est fasciné. Si π est un nombre-univers, il est amusant d'envisager ce que cela implique :

- quelque part dans π, il y a votre date de naissance (on connaît aujourd'hui assez de décimales pour en localiser la première occurrence, et un site *Internet* se charge de la recherche si vous le souhaitez ; voir la liste des sites *Internet* à la fin du livre) ;
- quelque part dans π, il y a votre numéro de sécurité sociale (comme ce nombre comporte 13 chiffres, il faudra attendre que l'on ait calculé au moins 10^{13} décimales de π pour avoir de bonnes chances de le localiser) ;

• quelque part dans π, il y a votre nom, prénom et adresse, codés par exemple en associant une lettre à chaque nombre entre 0 et 99 (comme cette séquence est assez longue, elle se trouve probablement très loin, et il est improbable que vous sachiez où avant votre mort) ;
• quelque part dans π, il y a, codé comme précédemment, le *Madame Bovary* de Gustave Flaubert ;
• quelque part dans π, il y a l'enregistrement (numérisé comme dans un disque compact, qui n'est qu'une suite de chiffres) du *Concerto Italien* de Jean-Sébastien Bach joué par Glenn Gould (il y a aussi l'enregistrement qu'aurait pu faire Bach de son concerto en parodiant le maniérisme de Gould) ;
• quelque part dans π, il y a le film numérisé de votre vie, de son premier instant au dernier ; mais il y a aussi des tas de versions erronées de ce film : avec des passages inversés, avec la fin modifiée, avec des parties racontées mensongèrement, etc.

Malheureusement, à l'exception des premiers éléments de la liste, et à moins que l'on réussisse à connaître les décimales de π par des résultats mathématiques, on ne sera jamais capable de dire où se trouvent ces séquences pour nous si pleines de sens. Il faudrait en effet connaître bien plus que les 10^{77} décimales de π présentées comme le maximum calculable et mémorisable sur des supports physiques.

Outre que l'on ignore encore si π est un nombre-univers, on en sait très peu sur les rapports entre la propriété d'être un nombre-univers et celle d'être algébrique ou transcendant. On sait seulement que :
– les nombres rationnels ne sont pas des nombres-univers (c'est évident puisque leurs décimales sont périodiques) ;
– il existe des nombres transcendants qui sont des nombres-univers ; c'est le cas du nombre de Champernowne, et c'est même le cas de la majorité d'entre eux ;
– il existe des nombres transcendants qui ne sont pas des nombres-univers ; c'est le cas du nombre de Liouville.

En revanche, on ignore s'il existe des nombres algébriques irrationnels qui soient aussi des nombres-univers. On pense que c'est le cas de tous les algébriques irrationnels, mais on ne sait le démontrer pour aucun !

(b) Les nombres *équirépartis* et *normaux* en base 2, 10 ou autres.

La loi des grands nombres indique que, quand on tire au hasard équitablement des chiffres en base b (donc parmi 0, 1, 2, ..., b–1) alors la fréquence des «0» tend vers $1/b$, de même que la fréquence des «1», etc. Nous dirons d'une telle suite qu'elle est *équirépartie*.

Ainsi, en base 10, si l'on tire au hasard des chiffres entre 0 et 9, on construit une suite infinie qui, avec une probabilité 1, possède une proportion de «0» qui tend vers 1/10, de même pour les «1», les «2», etc.

Autrement dit, presque tout nombre réel (le *presque* est celui de la théorie de la mesure) a ses chiffres (en base 2, 10 ou autres) *équirépartis*.

Un nombre réel est dit *normal en base b* si, en plus :

– la fréquence des couples de chiffres est équirépartie (en base 10, la fréquence des couples «00» doit tendre vers 1/100, de même que celle des couples «01», «02», etc.) ;

– la fréquence des triplets de chiffres est équirépartie, ainsi que celle des quadruplets, etc.

Remarquons qu'un nombre équiréparti en base b n'est pas forcément normal en base b, comme le montre le nombre $1/3 = 0{,}01010101...$ qui est équiréparti en base 2, mais n'est pas normal en base 2. On voit dans cet exemple qu'un nombre équiréparti peut être rationnel. Ce n'est pas le cas d'un nombre normal en base b, qui est nécessairement irrationnel (car si ce nombre était rationnel, il aurait une période, disons de longueur p, et les séquences de longueur p ne seraient pas équiréparties).

Un nombre qui est normal dans toutes les bases à la fois est dit *normal*. Comme «normal en base b» signifie équiréparti en base $b, b^2, b^3, ...$, on voit qu'un nombre est normal si et seulement s'il est équiréparti dans toutes les bases à la fois.

Au début du siècle, le mathématicien français Émile Borel a démontré le résultat, moins évident, que presque tous les nombres sont normaux (il s'agit là encore du *presque* de la théorie de la mesure). Il en résulte que presque tous les nombres sont normaux en base b (b fixé) et, bien sûr, que presque tous les nombres sont équirépartis en base b (b fixé). On en déduit aussi le fait, indiqué au paragraphe précédent, que presque tous les nombres sont des nombres-univers dans toutes les bases à la fois.

On sait que le nombre de Champernowne est normal en base 10, mais on n'a pas montré qu'il l'était en base quelconque. Notons (c'est important) qu'un nombre peut être normal sans être pour autant désordonné, puisque le nombre de Champernowne possède une structure simple parfaitement prévisible : normal n'implique donc pas *aléatoire*.

Grâce à A. Copeland et P. Erdös, on en sait un peu plus : les nombres qui, dans une base donnée b, s'écrivent sous la forme $0{,}a_1a_2a_3...$ (où a_n est une suite de nombres entiers croissante telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $a_n \leq n^{1+\varepsilon}$ à partir d'un certain rang), sont normaux dans cette base b. Les nombres suivants sont donc normaux en base 10 :
0,7142135424956... (les multiples de 7 les uns derrières les autres)
0,23571113171923... (les nombres premiers les uns derrière les autres).

Être normal dans une base n'entraîne pas qu'on le soit dans toute base : on sait en effet, grâce à W. Schmidt, que si deux bases b et c sont telles qu'il n'existe pas de couple $i\,j$ vérifiant $b^i = c^j$, alors il existe des nombres qui sont normaux dans l'une des bases et pas dans l'autre (la condition est aussi nécessaire).

Émile Borel (1871-1956).

En revanche, personne n'a jamais réussi à construire explicitement un nombre qui soit normal dans toutes les bases à la fois. On retrouve, en plus fort encore, le paradoxe rencontré au chapitre précédent à propos des nombres transcendants : presque tous les nombres sont *normaux dans toutes les bases*, mais on n'en connaît explicitement aucun ! (on verra plus loin que l'on sait en définir un, mais qu'alors on ne peut pas le calculer).

L'explication que nous avions donnée du paradoxe des nombres transcendants (infiniment plus nombreux que les algébriques, mais difficiles à trouver) s'applique ici encore : deux modes d'accès différents aux nombres réels, l'un *abstrait*, l'autre *constructif*, sont assimilés à tort. La situation semble tout de même vraiment étrange !

Concernant la normalité des nombres algébriques, notre ignorance, là encore, est totale ; on ne sait même pas laquelle des trois affirmations suivantes est vraie :
– tous les nombres irrationnels algébriques sont normaux ;
– aucun nombre irrationnel algébrique n'est normal ;
– certains nombres irrationnels algébriques sont normaux, d'autres non.

Des expériences récentes faites par J. Borwein, P. Borwein, R. Girgensohm et S. Parnes sur les 20 000 premières décimales de chacun des nombres $\sqrt{n}$ et $\sqrt[3]{n}$ pour $n = 2, ..., 1\,000$, n non carré et n non cube, semblent indiquer, comme pour π, que ce sont tous des nombres normaux.

Du côté des transcendants, on est un peu moins ignorant : on connaît des nombres transcendants normaux en base 10 (le nombre de Champernowne) et non normaux (le nombre de Liouville).

Notons aussi qu'au sujet des propriétés de désordre, on semble en savoir un peu plus sur les nombres transcendants que sur les nombres algébriques. En effet, les nombres irrationnels dont les décimales peuvent être définies par un automate à un nombre fini d'états (il s'agit d'un modèle abstrait d'ordinateur à mémoire finie) sont forcément transcendants. Ce résultat, démontré en 1988 par J. Loxton et A. van der Poorten, est un premier pas vers la démonstration de la conjecture de J. Hartmanis et R. Stearns, selon laquelle tout nombre irrationnel calculable en temps linéaire (c'est-à-dire dont le calcul de n décimales peut se faire en un temps proportionnel à n) est transcendant.

Des résultats obtenus en 1986 par R. Kannan, A. Lenstra et L. Lovasz sur l'identification des décimales des nombres algébriques, ou des nombres de la forme ln(a), arccos(a), arcsin(a) avec a algébrique (π est l'un de ces nombres), montrent la chose suivante (très importante pour ceux qui seraient tentés d'utiliser les décimales de π comme générateur aléatoire dans des applications cryptographiques) : la connaissance d'un nombre suffisant de décimales d'un tel nombre a (ou ln(a), etc.), accompagnée de l'information sur la taille maximum des coefficients de l'équation dont il est issu et du degré maximum de cette équation, permettent de reconstituer rapidement (c'est-à-dire en temps polynomial) l'équation, et de reconnaître le nombre en question, ce qui permet alors de calculer la suite de ses décimales.

Même si π ou les nombres algébriques irrationnels apparaissent normaux, ils sont donc, au sens cryptographique, réguliers et reconnaissables (comme le nombre de Champernowne) et ne doivent surtout pas être utilisés par ceux qui cherchent de bons générateurs de nombres aléatoires inviolables.

Notons au passage que lorsqu'on programme des méthodes de Monte-Carlo, on est moins exigeant qu'en cryptographie sur la «qualité» du hasard, et que les décimales de π peuvent encore être utiles pour la programmation de tels algorithmes (quoique leur usage soit risqué, puisque rien n'est établi rigoureusement).

Pour π, la situation se résume donc à l'étrange conjonction suivante :
– on constate que les chiffres que l'on calcule sont équirépartis en toute base, et π apparaît normal en toute base (la plupart des mathématiciens pensent en conséquence que π est normal) ;
– on ne sait même pas prouver les plus élémentaires des propriétés de désordre évoquées dans ce chapitre (par exemple, prouver que π est équiréparti en base 10) ;
– mais on sait, en revanche, que π ne doit pas être utilisé comme générateur aléatoire dans les applications cryptographiques, car il existe des techniques efficaces de reconnaissance de ses décimales.

Les nombres aléatoires au sens de Martin-Löf

Parmi les tests naturels que l'on peut faire passer à une suite de chiffres pour savoir si elle est aléatoire, il y a celui qui consiste à regarder si elle coïncide avec la suite des décimales du nombre $e = 2{,}7182818284590...$ Il paraît évident que si ces décimales sont identiques à celles du nombre e, cela ne peut être dû au hasard, et la suite en question ne peut pas être considérée comme aléatoire... Pour π, c'est la même chose ! Si les décimales d'une suite correspondent à celles de π, cette suite n'est pas aléatoire. Par conséquent, π n'est pas aléatoire, puisqu'il ne passera évidemment pas ce test !

N'est-on pas en train de tourner en rond ? Avec un tel raisonnement, ne montre-t-on pas qu'aucune suite n'est aléatoire, et qu'*aléatoire* ne veut rien dire en définitive ?

Étonnamment, la réponse est non : en s'y prenant bien, on peut lever la difficulté, et c'est la clef de la théorie la plus profonde qu'on connaisse sur les suites aléatoires.

Après que l'on se soit empêtré pendant plusieurs dizaines d'années dans cet apparent cercle vicieux, une solution est apparue vers 1940 à la suite de la mise au point de la théorie de la calculabilité. Cette théorie, due aux mathématiciens Kurt Gödel, Alan Turing, Alonzo Church et Stephen Kleene, indique que, parmi les suites de nombres, toutes ne sont pas calculables par machine, et donne une multitude de caractérisations mathématiques de la famille de *suites calculables*. Il suffit de retenir qu'une suite calculable est une suite que vous pouvez programmer dans le langage C, Basic ou Fortran de votre ordinateur de bureau (en supposant qu'il dispose d'une mémoire extensible à la demande). Il faudra encore 20 ans pour arriver, vers 1965, à la solution du problème des suites aléatoires, qui fut l'aboutissement des travaux de R. Solomonoff, A. Kolmogorov, G. Chaitin et P. Martin-Löf.

L'idée est qu'une suite aléatoire ne doit posséder aucune *propriété exceptionnelle* que l'on puisse *effectivement vérifier*. Pour rendre cette idée précise il faut définir *(a)* ce que veut dire propriété exceptionnelle ; *(b)* ce que veut dire propriété effectivement vérifiable.

Une propriété exceptionnelle est une propriété que presque aucune suite de chiffres ne vérifie, le «presque» étant bien sûr celui de la théorie de la mesure, que nous avons déjà explicité (en termes techniques, une propriété exceptionnelle est une propriété que seules les suites d'un ensemble de mesure nulle vérifient). Les propriétés «se terminer par une infinité de zéros», ou «ne pas être normale» (d'après le résultat de Borel) sont des propriétés exceptionnelles (le mot «normal» est donc bien choisi !). Comme ce sont aussi des propriétés effectivement vérifiables, il en résulte que, par définition, une suite *aléatoire au sens de Martin-Löf* ne se terminera pas par une infinité de "0" et sera normale.

Pour comprendre ce que veut dire «propriété effectivement vérifiable», considérons l'exemple suivant. Imaginons que nous connaissions les 30 premiers chiffres binaires d'une suite infinie :

111000111111000111000000111000000000111

Nous remarquons que les "1" vont trois par trois, ainsi que les "0". Voilà qui est peu ordinaire (la probabilité que cela se produise dans une suite infinie tirée au sort est nulle). Si nous avions à prendre la décision d'accepter ou de refuser cette suite comme suite aléatoire, nous la refuserions : elle est louche ! Une propriété effectivement vérifiable est simplement une propriété telle que «les "0" et les "1" vont trois par trois», que l'on peut vérifier par programme avec un risque de se tromper devenant de plus en plus petit quand on va assez loin dans les chiffres.

La définition précise est un peu difficile ; la voici quand même pour les courageux : une propriété *P* est *exceptionnelle* et *effectivement vérifiable* s'il existe un programme de test (destiné à exclure les suites ayant cette propriété *P*) qui, pour tout entier *n* (*n* correspond au degré plus ou moins grand avec lequel on applique le test), élimine certaines suites qui apparaissent satisfaire la propriété *P*. Le test, au niveau *n*, s'effectue en utilisant un nombre fini de chiffres de la suite, et est tel que les suites éliminées soient dans une proportion d'au plus $1/2^n$. Les suites qui sont toujours éliminées à partir d'un certain n (on peut dire «qui sont asymptotiquement éliminées») doivent être exactement celles qui satisfont la propriété P. La condition avec $1/2^n$ assure qu'elles forment un ensemble de mesure nulle. On remarque que la définition tient compte du fait suivant : une suite aléatoire dont le début possède une propriété remarquable peut être éliminée par erreur pour des n trop petits, mais elle ne l'est plus si l'on utilise le test avec une précision assez grande. Cette possibilité d'erreur, lorsqu'on applique un test avec trop peu de données, ne pouvait être évitée. Le test correspondant à la comparaison avec π consiste, au niveau n, à regarder les n premiers chiffres de la suite que l'on doit traiter, et à l'éliminer si ces chiffres sont ceux de π : au début, on peut se tromper si on a une suite qui ressemble à π, mais asymptotiquement, on n'élimine que π. Le test pour les suites composées de "0" et de "1" par paquets de trois consiste, au niveau n, à regarder à partir des $3n$ premiers chiffres si la propriété est vérifiée, et à éliminer la suite si c'est le cas : là encore, on peut se tromper au début, mais asymptotiquement, seules les suites visées par le test sont constamment éliminées.

Andreï Kolmogorov (1903-1987).

La condition stipulant que la vérification soit définissable par programme est très importante, car, si on ne l'imposait pas, toute suite particulière s vérifierait la propriété exceptionnelle «être égale à s», et il n'y aurait aucune suite aléatoire. Le succès de l'idée de Martin-Löf provient de ce qu'elle réussit un mariage entre une condition issue de la théorie des probabilités («ne satisfaire aucune propriété exceptionnelle») et une condition d'effectivité qui tempère la première, ce qui est indispensable pour avoir une définition non vide. La définition de Martin-Löf a été rendue plus claire, une dizaine d'années plus tard, grâce à la théorie de la complexité de Kolmogorov, sur laquelle il est intéressant de donner quelques précisions.

La théorie de Kolmogorov définit la complexité d'un objet fini (par exemple une suite finie de "0" et de "1") par la taille du plus petit programme informatique qui permet d'imprimer l'objet en question (on utilise un ordinateur de référence assez puissant pour cette mesure de taille, et l'on montre que la mesure dépend peu de l'ordinateur de référence). Une suite de un million de "1" possède une faible complexité de Kolmogorov, car il existe des programmes très courts tels que «pour $i = 1$ jusqu'à 1 000 000 ; imprimer 1 ; fin.» qui impriment cette suite. La suite du premier million de chiffres du développement de π possède une complexité de Kolmogorov plus grande, car le plus court programme qui l'imprime comporte plusieurs lignes (on ne le connaît pas précisément, mais sa longueur dépasse 100). Les programmes courts qui permettent d'imprimer des objets longs peuvent être vus comme des versions comprimées de ces objets. À l'opposé, une suite de longueur 1 000 000 possédant une complexité de Kolmogorov supérieure ou égale à 1 000 000 (on prouve facilement qu'il en existe) est totalement incompressible : il n'existe aucun moyen de la décrire sous forme condensée.

Cette notion de compression donnée par la théorie de la complexité de Kolmogorov permet de prouver un résultat remarquable, qui confirme que la définition de Martin-Löf est la bonne : une suite infinie de "0" et de "1" est aléatoire au sens de Martin-Löf si, et seulement si, elle est incompressible, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe une constante c telle que la complexité de Kolmogorov des n premiers chiffres de la suite est toujours plus grande que $n - c$.

«Aléatoire» est donc, dans un sens mathématique très précis, équivalent à «incompressible». Ce n'est pas là une conclusion inattendue. Ce qui est inattendu, c'est qu'il ait fallu attendre les années 1970 pour que ce résultat soit établi indépendamment par le mathématicien allemand C. Schnorr, le mathématicien russe L. Levin (aujourd'hui émigré aux États-Unis) et le mathématicien américain G. Chaitin.

Les objets vraiment aléatoires ne peuvent pas être décrits plus rapidement qu'en en énumérant leurs composants (par exemple des décimales). C'est la définition qui sert de base à la théorie de la complexité de Kolmogorov. On comprend alors pourquoi, dans le cadre de cette théorie, π ne peut pas être considéré comme aléatoire (ce qui confirme d'autres remarques faites dans ce chapitre). Le nombre π se définit de manière concise : on écrit des programmes très courts qui le calculent, tel le programme en langage C donné au chapitre 6, qui calcule 2 400 décimales de π et qui n'a pourtant que 158 caractères. Du point de vue de la théorie de la complexité de Kolmogorov, π est incontestablement simple.

À ma connaissance, l'étude des régularités de π se fait aujourd'hui uniquement par des méthodes statistiques. Jusqu'à une époque récente, la situation était analogue dans l'étude du génome. L'analyse des séquences génétiques s'est révélée beaucoup plus facile, car on a trouvé des régularités de toutes sortes : statistiques, algébriques (mots interdits, mots courts répétés à l'identique des centaines, voire des milliers de fois, etc.). L'une des techniques utilisées pour l'étude des séquences génétiques est celle des algorithmes de compression. L'idée, en parfaite conformité avec la théorie de la complexité de Kolmogorov, est que toute régularité identifiée donne une possibilité de compression, et que, réciproquement, toute compression réussie désigne une régularité. Cette approche *par la compression* n'a pas été utilisée pour π. Je doute qu'elle puisse donner quelque chose, mais comment en être certain avant d'avoir essayé ? Cette tentative aurait au moins l'intérêt de renouveler les jeux de tests à faire passer au prochain paquet de décimales que l'on ne tardera pas à calculer.

Les propriétés des suites aléatoires au sens de Martin-Löf sont remarquables ; en voici quelques-unes :

• Une telle suite n'est pas définissable par un programme. Si elle l'était, on utiliserait le programme qui la définit pour obtenir une version compressée de ses chiffres. On en tire deux conséquences remarquables. Tout d'abord, la suite des chiffres de π, ou de toutes les constantes mathématiques usuelles que l'on sait calculer, ne sont pas aléatoires au sens absolu de Martin-Löf. Ensuite, puisqu'un programme ne peut jamais produire de suites aléatoires au sens absolu de Martin-Löf, les fonctions *random* des langages de programmation, résultant de programmes, sont imparfaitement aléatoires. La crainte d'un paradoxe, que l'on a cru inévitable au début du paragraphe, était injustifiée : π ne peut pas être considéré comme aléatoire au sens le plus fort, puisqu'il possède une propriété exceptionnelle, celle d'être calculable (les nombres calculables sont dénombrables, car il n'y a qu'une infinité dénombrable de programmes).

• Les chiffres d'une suite aléatoire au sens de Martin-Löf définissent toujours un nombre normal et transcendant (puisque les nombres algébriques sont tous calculables).

• Les chiffres d'une telle suite aléatoire sont imprévisibles dans le sens précis suivant : quand on parie à l'aide d'un programme sur le $n + 1$-ième chiffre d'une suite aléatoire en connaissant seulement les n premiers chiffres, on n'obtient pas mieux en moyenne que si l'on pariait au hasard. Cette propriété d'imprévisibilité confirme l'idée intuitive que l'on ne gagne pas contre le hasard ; cette idée, sous des formes différentes, avait déjà été mathématisée par la théorie des martingales.

La situation paradoxale à laquelle nous avons déjà été confrontés à deux reprises semble ici atteindre son comble : presque tous les nombres sont aléatoires au sens de Martin-Löf, et pourtant, ni les nombres rationnels, ni les nombres algébriques, ni e, ni π, ni aucun nombre calculable n'est aléatoire au sens de Martin-Löf ! Connaît-on un nombre aléatoire ? Oui ! le nombre Ω de Chaitin.

Un nombre pire que π

Le nombre π est apparu au cours de l'histoire comme un nœud extrême de difficultés ; il est vrai qu'en dépit des progrès remarquables de ces dernières années, relatés dans ce livre, le nombre π concentre encore en lui de nombreux mystères. Toutefois, le nombre Ω de Chaitin, connu depuis 20 ans, apparaît bien pire sous certains angles.

Bien sûr, le verbe *connaître* prend ici un sens assez particulier. Le nombre Ω est défini comme la probabilité qu'un ordinateur universel à programmes autodélimités s'arrête (on trouvera des détails sur cette théorie et sur Ω dans l'ouvrage de Li et Vitanyi, ou dans celui que j'ai écrit sur le sujet en 1993).

Concentrons-nous sur la situation mathématique étrange, mais nullement paradoxale, de Ω. Ce nombre est parfaitement défini : c'est un objet mathématique sans ambiguïté, ne dépendant d'aucun paramètre (si l'on s'impose d'être tout à fait précis, ce qui ne pose aucun problème). Toutefois, par nature, il ne peut pas être calculé complètement : certains de ces chiffres sont évaluables, mais on arrive très vite à un point où le calcul dépend de conjectures mathématiques irrésolues qu'il est impossible de contourner. La définition précise de Ω permet de connaître et de démontrer de façon rigoureuse nombre de ses propriétés sans avoir à le calculer (c'est la même chose pour π !) : par exemple, Ω est normal dans toute base, et c'est le seul nombre explicitement défini qui a cette propriété.

Comme le montre bien le nombre Ω de Chaitin, on doit se garder de confondre deux notions en apparence très proches. Il n'est pas équivalent pour un nombre :
- d'être «bien défini» mathématiquement (explicitement défini) et
- d'être calculable (explicitement construit).

Or la théorie de la calculabilité a fourni dès sa naissance, en 1936, de nombreux exemples d'objets parfaitement bien définis mais non calculables. La fonction qui, à un programme, associe "0" si le programme finit par s'arrêter, et "1" si le programme ne s'arrête jamais, est une fonction parfaitement bien définie. Pourtant elle n'est pas calculable, ce que l'on déduit du résultat d'indécidabilité de l'arrêt d'un programme dû à Alan Turing.

En regard des propriétés du nombre Ω, le nombre π apparaît bien sage : π est transcendant, mais il est calculable, donc compressible, alors que Ω, s'il est aussi transcendant, est en outre non calculable et même incompressible.

Peut-être dira-t-on que le nombre Ω «triche», car on tire assez facilement de sa définition toutes les propriétés qu'on lui connaît, alors que cette même définition empêche de le connaître dans le détail et, en particulier, de le calculer. De son côté, π est plus «franc» : on peut en connaître le détail, même si cela semble impliquer qu'il est difficile de démontrer certaines propriétés simples le concernant.

Il se peut que π possède toutes les propriétés *générales* (telle «être normal»), par opposition aux propriétés *particulières* (telle «ne pas être égal à π»), des nombres aléatoires. Toutefois il faudrait préciser ce que veut dire *générale* ou *particulière*. Peut-être arrivera-t-on à formuler une notion de suite aléatoire plus faible que celle définie par

Martin-Löf, qui serait adaptée à π. Les notions faibles de suite aléatoire qui existent en cryptographie sont déjà trop fortes pour π, comme nous l'avons dit. L'«aléatoirité» de π se trouve sans doute entre la normalité et l'aléatoirité cryptographique, et, en tout cas, bien en dessous de l'aléatoirité forte de Martin-Löf, mais aujourd'hui, dans l'impossibilité de prouver ne serait-ce que la normalité de π, on ne peut pas en dire plus. La théorie des suites aléatoires n'est pas close, et π est visiblement au centre d'un nœud de difficultés.

L'aboutissement de la recherche du «finiment définissable»

Notons encore, sur la théorie de la calculabilité et ses conséquences pour π, que la notion de «nombre finiment définissable», que les mathématiciens ont poursuivie durant des siècles et progressivement étendue *(voir le chapitre 9)*, n'est pas encore stabilisée aujourd'hui.

Un nombre finiment définissable n'est pas un nombre algébrique, comme on l'a cru au XIXe siècle (car π est finiment définissable dès que l'on dispose d'une notation pour les séries infinies). Ce n'est pas non plus un *nombre calculable par programme*, comme on l'a cru un moment, car si tout nombre définissable par programme est bien sûr finiment définissable (un programme est une forme générale de définition), il existe aussi des nombres tels que Ω, qui sont finiment définissables et non calculables.

Un nombre finiment définissable est un nombre définissable par une propriété caractéristique (qui est bien sûr exprimée finiment !) dans un cadre formel donné (comme l'est par exemple le nombre Ω de Chaitin dans le cadre de l'arithmétique). Or on a découvert qu'il n'y a pas de cadre formel ultime – ce que mettent en évidence les théorèmes d'incomplétude de Gödel et, plus concrètement, les recherches en théorie des grands cardinaux – ; par conséquent, la notion de *finiment définissable* n'est pas stabilisée, et apparaît susceptible d'être encore élargie avec l'extension des cadres formels.

Le nombre $\sqrt{2}$ échappait au monde des nombres rationnels, mais était quand même finiment définissable (et même constructible en quelques coups de compas). Le nombre π échappait au monde des nombres constructibles à la règle et au compas, et même au monde bien plus large des nombres algébriques, mais il était finiment définissable, car calculable. Le nombre Ω de Chaitin échappe quant à lui au calculable, mais reste encore finiment définissable.

Quels seront les échelons supérieurs du finiment définissable ? Auront-ils vraiment de l'importance ? Nous ne le savons pas aujourd'hui, mais les progrès que nous avons dû faire pour connaître les niveaux précédents sont remarquables et ont enrichi formidablement le monde mathématique.

Assez étrangement, dès les premiers niveaux (celui des irrationnels tels que $\sqrt{2}$), nous avons perdu le contrôle des propriétés liées au hasard et, en particulier, de celle de normalité : nous constatons, sans pouvoir le démontrer, que $\sqrt{2}$ est normal. Nous sommes encore dans l'inconnu quant à la normalité de π, et nous n'avons obtenu la maîtrise de la normalité du nombre Ω de Chaitin qu'en ayant perdu la possibilité de le calculer.

Ce jeu étrange du hasard et de la *définissabilité finie* ne manque pas d'intriguer. Il prouve que le travail des mathématiciens enrichit toujours les questions les plus simples et les plus fondamentales, qui sont celles du fini et du hasard ; siècle après siècle, les mathématiques réinventent les relations entre ces deux concepts, sans jamais réussir à en donner une compréhension complète et fixée.

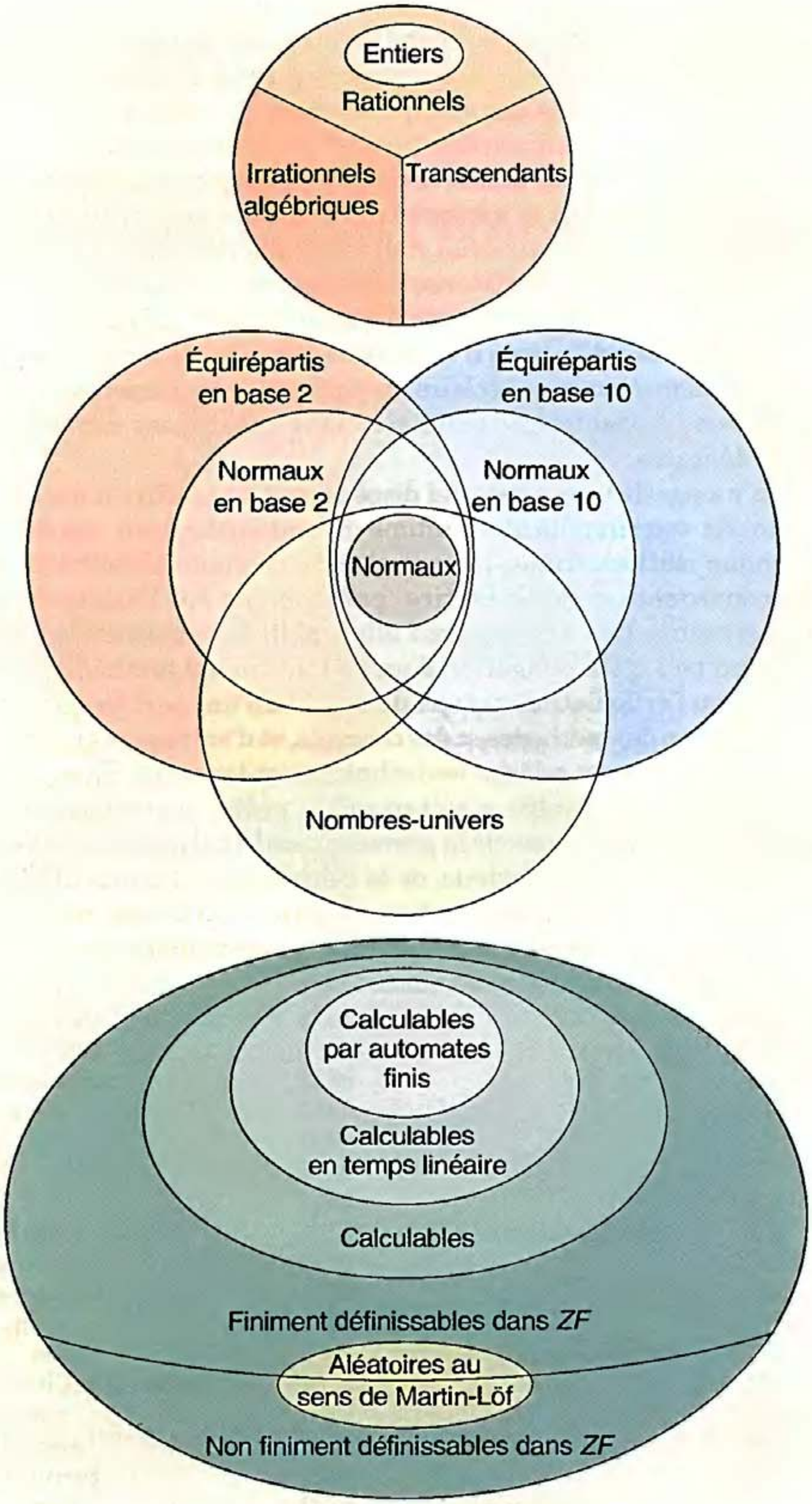
Conclusion

Nous disposons à présent d'un cadre théorique clair, à la fois pour définir les nombres, en parler, mesurer leur rareté et même leur désordre. Toutefois ce cadre ne dispense pas des études méticuleuses, de nature arithmétique, combinatoire et analytique, qui sont souvent les seules à faire progresser les problèmes précis, et qui, mathématiquement, restent difficiles. Dans cette recherche d'une meilleure connaissance de π, les ordinateurs joueront un rôle de plus en plus important, non seulement parce qu'ils permettent de disposer de ses décimales, de ses chiffres binaires ou de son développement en fraction continue, mais aussi parce qu'ils calculent des primitives, des polynômes, des séries et toutes sortes de choses utiles aux mathématiciens, et qu'à force de calcul, ce qu'ils accomplissent vaut bien des raisonnements.

Comme dans la solution du paradoxe des *nombres fréquents mais introuvables* (rencontré plusieurs fois dans les deux derniers chapitres), deux accès totalement opposés aux objets mathématiques doivent être clairement distingués et appréciés.

– L'accès «par le haut», qui est celui que l'on perfectionne en introduisant de nouvelles notions abstraites et en approfondissant les anciennes : concepts de nombres, d'espaces géométriques, concepts de l'analyse (limites, dérivées, intégrales, etc.), théorie des ensembles, topologie, algèbre abstraite, théorie de la calculabilité et de la complexité, logique mathématique.

– L'accès «par le bas», c'est-à-dire par la combinatoire finie des objets finis, par l'arithmétique, par le raisonnement analytique minutieux, la recherche de nouvelles formules, de nouvelles inégalités, etc.

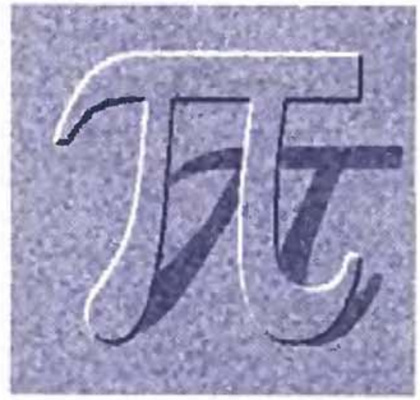


Différentes classifications des nombres réels. Le schéma du haut est celui, classique, que nous a légué le XIX^e siècle *(voir le chapitre 9)*. Le schéma du milieu illustre quelques propriétés de désordre faible des nombres, et les relations existant entre elles. Un *nombre-univers* est un nombre qui contient chaque séquence finie possible, quelle que soit la base où on l'écrit : par exemple, en base 10, on trouvera quelque part dans la suite des chiffres d'un tel nombre la séquence 0123456789. Par définition, un nombre est *équiréparti en base 10* si, dans son écriture décimale, la fréquence d'apparition de chaque chiffre est 1/10. Un nombre est *normal en base 10* si, en outre, tous les couples de chiffres, de 00 à 99, ont la même fréquence d'apparition de 1/100 ; de même pour les triplets (qui ont tous la fréquence 1/1000), les quadruplets, etc. Un nombre *normal* tout court (c'est-à-dire normal en toute base) est bien sûr un nombre-univers. Le schéma du bas illustre la difficulté du calcul des chiffres d'un nombre réel. Seuls les plus simples des nombres, tels les rationnels, sont calculables par un automate fini (une machine ayant une quantité de mémoire fixée). Il ne semble pas que l'on puisse calculer les décimales de π en temps linéaire (c'est-à-dire proportionnel à n). Toutefois, π est calculable (car on connaît une multitude d'algorithmes qui en calculent les décimales en un temps proportionnel à n^2, voire un peu moins). Ce n'est pas le cas du nombre Ω de Chaitin. Toutefois, Ω est finiment définissable dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (*ZF*), utilisée comme formalisme général en mathématiques. Il n'y a qu'une infinité dénombrable de nombres finiment définissables dans *ZF*, et il existe donc des nombres non finiment définissables dans *ZF*. Aucun nombre aléatoire au sens de Martin-Löf n'est calculable, mais certains sont finiment définissables (tel Ω), et d'autres non.

Les deux accès sont aussi importants l'un que l'autre, et l'on se trompe gravement en pensant que l'un dispense de l'autre, même si chaque mathématicien a son côté préféré. Le cadre abstrait ne résout pas toutes les questions simples qu'il permet de poser, ni toutes les questions anciennes qui, parfois, restent bloquées (nous en avons vu beaucoup qui concernent π dans ce chapitre). L'irrationalité de $\zeta(3)$ est un exemple extrême de la nécessité de l'accès par le bas : la démonstration de Roger Apéry ne devait rien aux outils nouveaux. La preuve donnée par Cantor de l'existence des nombres transcendants et la mesure de leur importance relative est un exemple à l'opposé : une puissance formidable tirée d'une façon nouvelle de considérer les objets mathématiques, qui éclaire en profondeur les anciennes questions et rend évidentes certaines solutions auparavant considérées comme délicates.

Il n'y a pas de voie royale qui dispenserait de souffrir, il n'y a pas de point de vue simplificateur ultime où tout deviendrait immédiat. La logique mathématique, avec sa théorie de l'indécidabilité et les fines conséquences qu'on en tire (par exemple sur l'existence de démonstrations très longues dont elle établit la nécessité absolue), éclaire un peu cette obligation d'un double travail mathématique, dont on a vu l'articulation au sujet de π. Il faut d'une part élargir sans cesse le champ des méthodes et des concepts, et d'autre part appliquer et perfectionner sans relâche les techniques et les outils anciens. On l'aura compris, le nombre π n'était qu'un prétexte pour parler de toutes les mathématiques : de la géométrie, de l'analyse, de l'arithmétique, de l'algèbre, de la logique, de la calculabilité, des algorithmes, des ordinateurs et bien sûr des hommes qui, errant dans ce monde abstrait et parfois terriblement concret, ne savent jamais s'ils ne font que le découvrir ou s'ils le construisent.

Tableaux, formules et données complémentaires



Les meilleurs calculs de π
(d'après D. Bailey, P. Borwein, J. Borwein et S. Plouffe, 1997)

(A) Avant le XX^e siècle

NOM	DATE	CALCUL	DÉCIMALES
Babyloniens	2000 avant J.C.	3,125 (= 3+1/8)	1
Égyptiens	2000 avant J.C.	3,16045 (= $[16/9]^2$)	1
Chinois	1200 avant J.C.	3	0
La Bible	550 avant J.C.	3	0
Archimède	250 avant J.C.	3,14185	3
Hon Han Shu	130	3,1622 (= $\sqrt{10}$)	1
Ptolémée	150	3,14166 (= 377/120)	3
Chung Hing	250	3,1622 (= $\sqrt{10}$)	1
Wang Fau	250	3,15555 (=142/45)	1
Liu Hui	264	3,14159	5
Siddhanta	380	3,1416 (3 + 177/1250)	3
Tsu Chung Chih	480?	3,141592 (= 355/113)	6
Aryabhata	499	3,14156	4
Brahmagupta	640	3,1622 (= $\sqrt{10}$)	1
Al-Khowarizmi	800	3,1416	3
Fibonacci	1220	3,141818	3
Al-Kashi	1429		14
Otho	1573	3,1415929	6
Viète	1593	3,1415926536	9
Romanus	1593		15
Van Ceulen	1596		20
Van Ceulen	1609		34
Grienberger	1630		39
Newton	1665		16
Sharp	1699		71
Seki	1700		10
Machin	1706		100
De Lagny	1719	127 décimales calculées	112
Takebe	1723		41
Matsunaga	1739		50
Vega	1794		140
Rutherford	1824	208 décimales calculées	152
Strassnitzky, Dahse	1844		200
Clausen	1847		248
Lehmann	1853		261
Rutherford	1853		440
W. Shanks	1874	707 décimales calculées	527

(B) AU XX^{e} SIÈCLE

NOM	DATE	DÉCIMALES
Ferguson	1946	620
Ferguson	01-1947	710
Ferguson et Wrench	1948	808
Smith et Wrench	1949	1 120
Reitwiesner et al. (ENIAC)	1949	2 037
Nicholson et Jeenel	1954	3 092
Felton	1957	7 480
Genuys	01-1958	10 000
Felton	05-1958	10 021
Guilloud	1959	16 167
Shanks et Wrench	1961	100 265
Guilloud et Filliatre	1966	250 000
Guilloud et Dichampt	1967	500 000
Guilloud et Bouyer	1973	1 001 250
Miyoshi et Kanada	1981	2 000 036
Guilloud	1982	2 000 050
Tamura	1982	2 097 144
Tamura et Kanada	1982	8 388 576
Kanada, Yoshino et Tamura	1982	16 777 206
Ushiro et Kanada	10-1983	10 013 395
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	01-1986	29 360 111
Kanada et Tamura	10-1986	67 108 839
Kanada, Tamura, Kobo et al.	01-1987	134 217 700
Kanada et Tamura	01-1988	201 326 551
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1989	480 000 000
Kanada et Tamura	07-1989	536 870 898
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1989	1 011 196 691
Kanada et Tamura	11-1989	1 073 741 799
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1991	2 260 000 000
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1994	4 044 000 000
Takahashi et Kanada	06-1995	3 221 225 466
Kanada	08-1995	4 294 967 286
Kanada	10-1995	6 442 450 938
Kanada et Takahashi	07-1997	51 539 600 000

BASE 2, SANS CALCULER LES DIGITS PRÉCÉDENTS		POSITION
Bailey-Borwein-Plouffe	1996	40 000 000 000
Bellard	10-1996	400 000 000 000
Bellard	09-1997	1 000 000 000 000

Approximations rationnelles et algébriques de π

$(16/9)^2 = 3{,}1605$ (Égyptiens)

$\frac{355}{113} = 3{,}1415929$ (Tsu Chung Chih)

$\left(\frac{553}{331+1}\right)^2 = 3{,}14153$

$\frac{103\,993}{33\,102} = 3{,}1415926530119026$ (Euler)

$1{,}09999901 \times 1{,}19999911 \times 1{,}39999931 \times 1{,}69999961 = 3{,}14159257$

$\left(102 - \frac{2\,222}{22^2}\right)^{1/4} = 3{,}14159265258$ (Ramanujan)

$2 + \sqrt{1 + \left(\frac{413}{750}\right)^2} = 3{,}1415926497$

$\left(\frac{77\,729}{254}\right)^{1/5} = 3{,}1415926541$ (Castellanos)

$\frac{63}{25}\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right) = 3{,}14159265380$ (Ramanujan)

$\frac{355}{113}\left(1 - \frac{0{,}0003}{3\,533}\right) = 3{,}1415926535897943$ (Ramanujan)

$\left(2e^3 + e^8\right)^{1/7} = 3{,}141716$ (Castellanos)

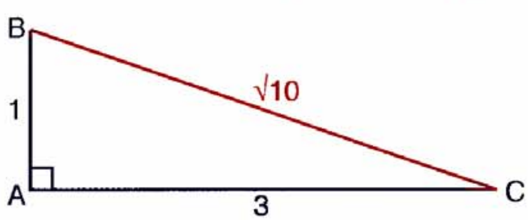
$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3{,}14164$ (Ramanujan)

$\left(\frac{66^3 + 86^2}{55^3}\right)^2 = 3{,}1415970$ (Castellanos)

Constructions à la règle et au compas d'approximations de π

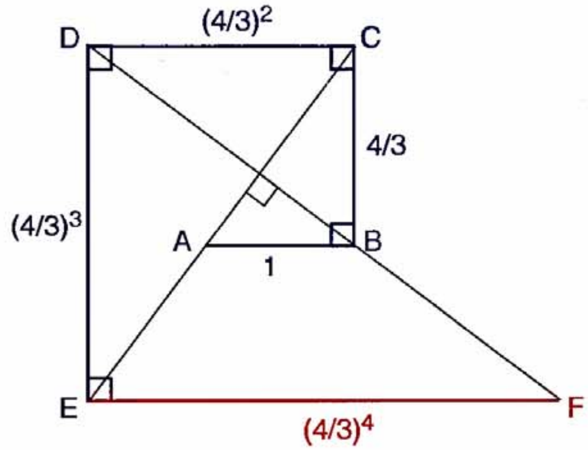
Les solutions approchées de la rectification et de la quadrature du cercle

CONSTRUCTION 1 (à partir de l'approximation de Hou Han Shu) :



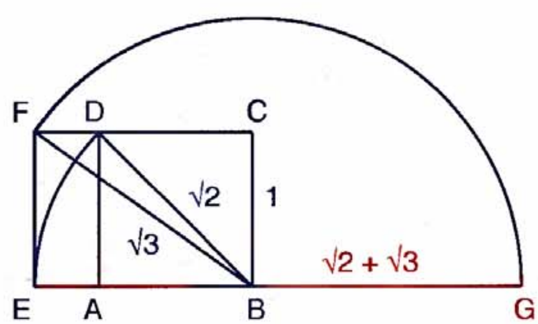
AB = 1
AC = 3
BC = $\sqrt{10} = 3{,}1622 \approx \pi$
Erreur : 0,66 %

CONSTRUCTION 2 (à partir de l'approximation des Égyptiens) :



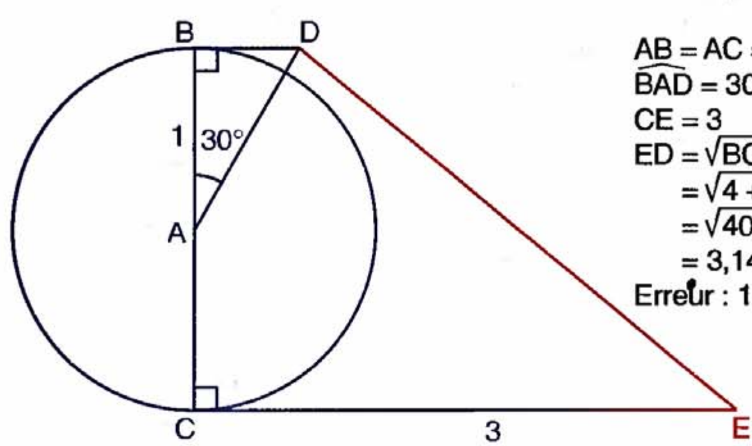
$AB = 1$
$BC = 4/3$
$CD = (4/3)^2$
$DE = (4/3)^3$
$EF = (4/3)^4 = 3{,}16049 \approx \pi$
Erreur : 0,6 %

CONSTRUCTION 3 (à partir de l'approximation de π par $\sqrt{2} + \sqrt{3}$) :



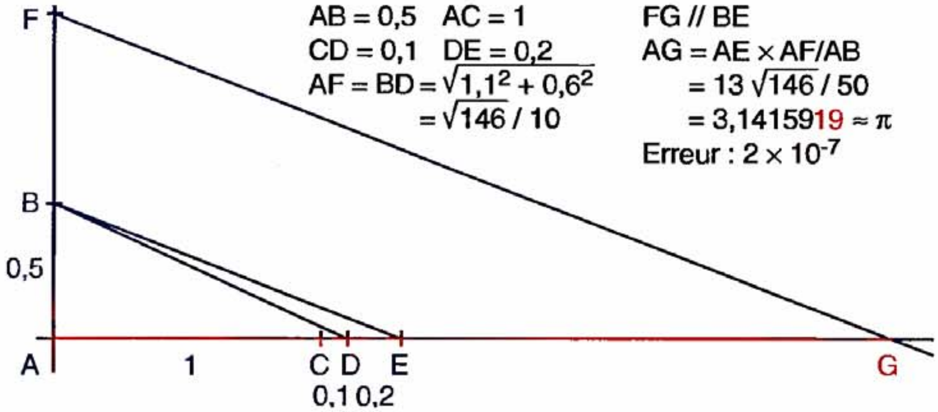
ABCD un carré de côté 1
$BD = BE = \sqrt{2}$
$CF = BE = \sqrt{2}$
$BG = BF = \sqrt{3}$
$EG = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1462 \approx \pi$
Erreur : 0,46 %

CONSTRUCTION 4 (méthode de Kochansky - 1685) :



$AB = AC = 1$
$\widehat{BAD} = 30°$
$CE = 3$
$ED = \sqrt{BC^2 + (CE - BD)^2}$
$= \sqrt{4 + (3 - 1/\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{40/3 - 6/\sqrt{3}}$
$= 3{,}141533 \approx \pi$
Erreur : $1{,}8 \times 10^{-5}$

CONSTRUCTION 5 (méthode de Specht - 1836) :



$AB = 0,5 \quad AC = 1$

$CD = 0,1 \quad DE = 0,2$

$AF = BD = \sqrt{1,1^2 + 0,6^2}$

$= \sqrt{146} / 10$

$FG \,//\, BE$

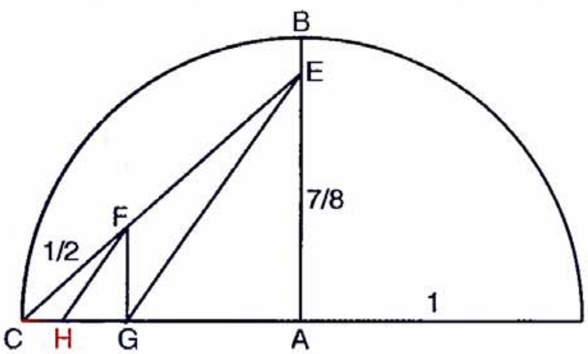
$AG = AE \times AF/AB$

$= 13\sqrt{146} / 50$

$= 3,1415919 \approx \pi$

Erreur : 2×10^{-7}

CONSTRUCTION 6 (méthode de Jacob de Gelder - 1849) :



$AB = AC = 1$

$AE = 7/8 \quad CF = 1/2$

$FG \,//\, AB \quad FH \,//\, EG$

$CF/CH = CE/CG$

$CH = CF \times CG/CE$

$= CF^2/CE^2$

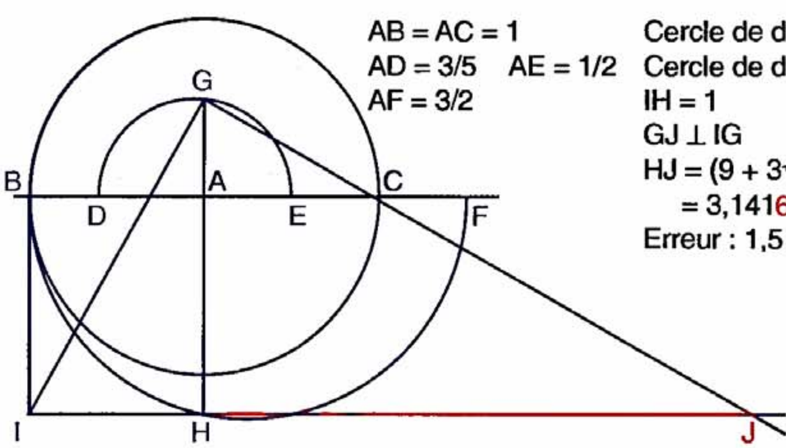
$= (1/4)^2 / [1 + (7/8)^2]$

$= 4^2/(8^2 + 7^2)$

$= 0,1415929 \approx \pi - 3$

Erreur : $8,5 \times 10^{-8}$

CONSTRUCTION 7 (méthode de Hobson - 1913) :



$AB = AC = 1$

$AD = 3/5 \quad AE = 1/2$

$AF = 3/2$

Cercle de diamètre DE

Cercle de diamètre BF

$IH = 1 \quad IH \,//\, BC$

$GJ \perp IG$

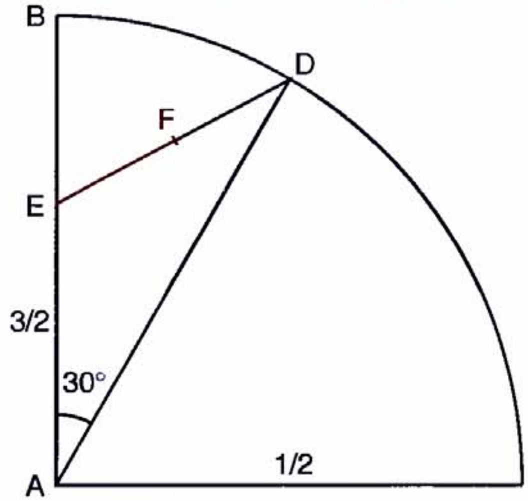
$HJ = (9 + 3\sqrt{5})/5$

$= 3,14164 \approx \pi$

Erreur : $1,5 \times 10^{-5}$

Remarquez que $GH \approx \sqrt{\pi}$ et qu'en conséquence, un carré de côté GH est une solution approchée du problème de la quadrature.

CONSTRUCTION 8 (méthode de Goodhue - 1974) :

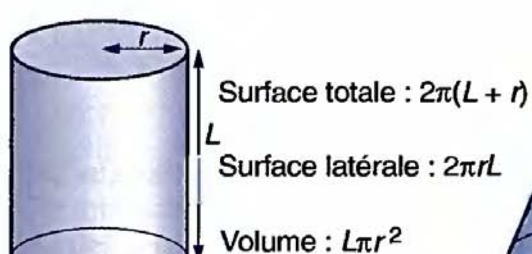


$AB = AC = 1/2$
$AE = 3/2$
$\widehat{BAD} = 30°$
$EF = FD$
$EF = 1/2\sqrt{(\sqrt{3}/4 - 3/10)^2 + 1/16}$
$= 0{,}1415912 \approx \pi - 3$
Erreur : 4×10^{-7}

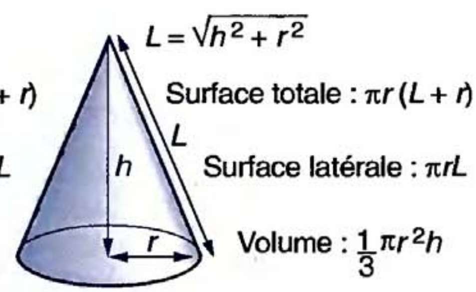
Le nombre π en géométrie

• Trois points sont choisis au hasard dans un carré. La probabilité qu'ils forment un triangle obtus est $97/150 + \pi/40$
• Quand N droites sont dessinées au hasard dans un carré, le nombre moyen de régions que ces droites déterminent dans le carré est $N(N-1)\pi/16 + N + 1$.

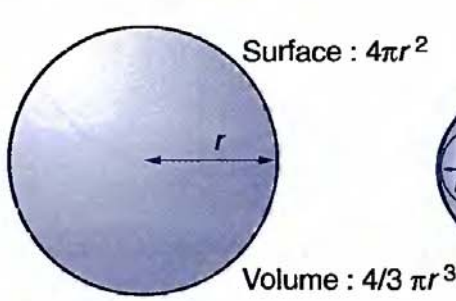
CYLINDRE DE RÉVOLUTION



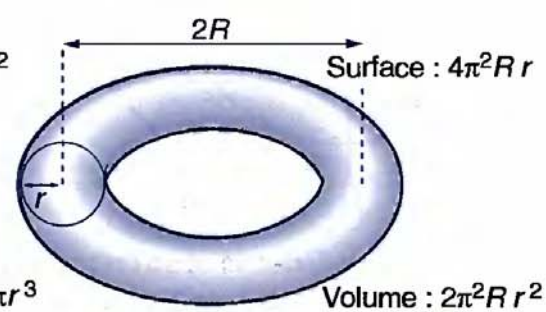
CÔNE DE RÉVOLUTION DROIT



SPHÈRE



TORE



Le nombre π en arithmétique et en probabilité : complément au chapitre 1

Nous allons démontrer que la probabilité que deux nombres entiers tirés au hasard soient premiers entre eux (c'est-à-dire n'aient pas de diviseurs communs) est $6/\pi^2$, soit environ 60,927 pour cent.

Proposition 1

Lorsque n tend vers l'infini, la probabilité que deux entiers $\leq n$ soient premiers entre eux tend vers le produit infini, noté Π :

$$\prod_{p=2,\, p \text{ premier}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{25}\right) \times \ldots$$

Démonstration

Soit n fixé. Comptons le nombre de couples (i, j) d'entiers $\leq n$ premiers entre eux. Pour que i et j soient premiers entre eux, il faut qu'ils ne soient pas tous les deux multiples de 2 (première condition). La proportion de couples (i, j) tels que i et j sont multiples de 2 valant $1/2^2$, ceux qui satisfont cette première condition sont dans une proportion de $1 - 1/2^2$. De même, pour que i et j soient premiers entre eux, il faut qu'ils ne soient pas tous les deux multiples de 3 (deuxième condition). Des considérations élémentaires d'arithmétique montrent que la proportion des couples (i, j) tels que i et j sont multiples de 3 parmi les couples restants est $1/3^2$, aussi les couples qui satisfont la première et la deuxième condition sont dans une proportion de $(1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2)$.

En continuant ainsi pour tous les nombres premiers (ce que nous ne détaillons pas mais que l'on peut rendre parfaitement rigoureux), on arrive au produit infini donné ci-dessus.

Proposition 2

Pour tout nombre réel $a > 1$:

$$\prod_{p=2,\, p \text{ premier}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^a}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

La notation du second membre désigne le résultat de l'infinité d'additions : $1/1^a + 1/2^a + 1/3^a + \ldots$

Démonstration

On utilise d'abord l'identité :

$$\left(1 - \frac{1}{p^a}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^a} + \frac{1}{p^{2a}} + \frac{1}{p^{3a}} + \ldots$$

En développant le produit infini grâce à l'identité précédente, on tombe sur la somme infinie des termes obtenus comme produits finis des $1/p^{ia}$ pour tous les nombres premiers p et tous les entiers i (les termes obtenus comme produits d'une infinité de $1/p^{ia}$ valent 0). Or un produit fini de facteurs p^i, avec p premier et i entier, est un entier n, et chaque entier n s'écrit d'une manière unique sous une telle forme (c'est le théorème fondamental de l'arithmétique qui énonce que tout entier s'écrit d'une manière unique comme produit de nombres premiers). La somme infinie que l'on obtient est donc celle de tous les $1/n^a$, où n est un entier. Nous passons sous silence les arguments usuels établissant la convergence des séries et des produits infinis.

Pour conclure il suffit à présent d'établir que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$

Pour tout entier naturel non nul p, on pose :

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{p} \cot^2 \frac{n\pi}{2p+1} \qquad \beta_p = \sum_{n=1}^{p} \sin^{-2} \frac{n\pi}{2p+1}$$

On sait que : $\cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a} - 1$ d'où : $\beta_p = \alpha_p + p$

On pose : $u_n = \cot \dfrac{n\pi}{2p+1}$ et $z_n = \exp \dfrac{2ni\pi}{2p+1}$

En utilisant les formules classiques $\cos a = (e^{ia} + e^{-ia})/2$ et $\sin a = (e^{ia} - e^{-ia})/2i$, on trouve que :

$$u_n = i\frac{z_n + 1}{z_n - 1} \qquad z_n = \frac{-iu_n + 1}{-iu_n - 1}$$

En écrivant $\pm iu_n$ en fonction de z_n, on vérifie aisément que $\pm iu_1, \pm iu_2, ..., \pm iu_p$ sont les racines du polynôme :

$$(X+1)^{2p+1} - (X-1)^{2p+1}$$

En développant cette expression à l'aide de la formule :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n, \text{ avec } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

on trouve un polynôme n'ayant que des termes pairs, de la forme : $a_q X^{2q} + a_{q-1} X^{2(q-1)} + a_{q-2} X^{2(q-2)} + ... + a_1 X^2 + a_0$; or on montre que la somme des carrés des racines d'un tel polynôme vaut $-2a_{q-1}/a_q$. D'où :

$$-2\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_p^2\right) = -2\,\frac{2\,(2p+1)\,2p\,(2p-1)\,/\,(2\times 3)}{2\,(2p+1)}$$

et, finalement,

$$\alpha_p = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_p^2 = \frac{p\,(2p-1)}{3} \quad \text{et} \quad \beta_p = \frac{p\,(2p+2)}{3}$$

Puisque $\cot x \le 1/x \le 1/\sin x$ lorsque $0 < x < \pi/2$, on en déduit que :

$$\alpha_p \le \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{2p+1}{n\,\pi}\right)^2 \le \beta_p$$

$$\frac{\pi^2 \alpha_p}{(2p+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2 \beta_p}{(2p+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2 \left(p^2 - p/2\right)}{\left(6p^2 + 6p + 3/2\right)} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2 \left(p^2 - p\right)}{\left(6p^2 + 6p + 3/2\right)}$$

Les fractions à gauche et à droite tendant vers $\pi^2/6$ lorsque p tend vers l'infini, on arrive au résultat recherché.

La formule d'Euler de 1740 et quelques variantes

$e^{i\pi} = -1$	Formule d'Euler, qui associe les nombres -1, π, e et i.
$e^{i\pi} + 1 = 0$	Variante associant 0, 1, π, e et i.
$e^{(-1)i\pi} + 1 = 0$	Variante associant 0, 1, -1, π, e et i.
$e^{2i\pi} - 1 = 0$	Variante associant 0, -1, 2, π, e et i.
$e^{i\pi/2} = i$	Variante associant 2, π, e et i.
$1 + (-1)e^{2i\pi} = 0$	Variante associant 0, 1, -1, 2, π, e et i.
$\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1 + i$	Variante associant 1, 4, $\sqrt{2}$, π, e et i.
$\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4} = -1 + i$	Variante associant -1, 3, 4, $\sqrt{2}$, π, e et i.
$e^{3i\pi/4} + \sqrt{2}\,(1 + (-1)i) / 2 = 0$	Variante associant 0, 1, -1, 2, 3, 4, $\sqrt{2}$, π, e et i.

Toutes ces formules se déduisent de la formule : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, qui, géométriquement, signifie que le point du plan correspondant au nombre complexe e^{ix} est le point de coordonnées ($\cos x$, $\sin x$).

Des formules de séries pour π

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^8}{9\,450}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m} (2\pi)^{2m}}{2\,(2m)\,!}$$

où les nombres de Bernoulli B_k sont définis par :

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} B_k = 0$, ce qui donne :

$B_0 = 1,\ B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$,

$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}$

D'autres formules de somme infinie font intervenir les nombres de Bernoulli :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7\,\pi^4}{720}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{31\,\pi^6}{30\,240}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^8} = \frac{1}{1^8} - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \cdots = \frac{127\,\pi^8}{1\,209\,600}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2m}} = \frac{1}{1^{2m}} - \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} - \frac{1}{4^{2m}} + \cdots = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m}\, \pi^{2m} \left(2^{2m-1} - 1\right)}{(2m)\,!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^8} = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \cdots = \frac{17\,\pi^8}{161\,280}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2m}} = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \cdots = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m}\, \pi^{2m} \left(2^{2m} - 1\right)}{2\,(2m)\,!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\,\pi^5}{1336}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2m+1}} = \frac{1}{1^{2m+1}} - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}} + \cdots = \frac{(-1)^m E_{2m}\,\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}\,(2m)\,!}$$

où les E_i sont les coefficients d'Euler définis par :

$\dfrac{2e^t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \dfrac{t^n}{n\,!}$, ce qui donne :

$E_{2n-1} = 0$ pour $n \geq 0$,

$E_0 = 1,\ E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ E_6 = -61,\ E_8 = 1\,385,\ E_{10} = -50\,521$

Voici encore, pêle mêle, quelques autres formules pour π :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2m}{m}} = \frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\binom{2m}{m}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\binom{2m}{m}} = \frac{\pi^2}{18} \quad \text{(Euler)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\binom{2m}{m}} = \frac{2}{27}(\pi\sqrt{3}+9)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4\binom{2m}{m}} = \frac{17\pi^4}{3\,240} \quad \text{(Comtet, 1974)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\,2^m}{\binom{2m}{m}} = \pi + 3$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{m^2\binom{2m}{m}} = \frac{2\pi^2}{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\binom{2m}{m}}{(2m+1)\,16^m} = \frac{\pi}{3}$$

La formule suivante, due à Ramanujan :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m}^3 \frac{42m+5}{2^{12m+4}} = \frac{1}{\pi}$$

permet de calculer le deuxième bloc de n digits de $1/\pi$ sans avoir calculé le premier (une sorte d'avant-première de la formule de S. Plouffe).

D'autres formules pour π (non reproduites ici) sont indiquées :
– au chapitre 1 (formules élémentaires pour «mesurer» π) ;
– au chapitre 4 (séries, produits et fractions continues classiques de l'analyse, provenant par exemple des développements limités des fonctions trigonométriques) ;
– au chapitre 5 (formules avec des arcs tangentes) ;
– au chapitre 7 (nouvelles formules trouvées en 1995 et permettant le calcul des chiffres binaires de π, π^2 et de quelques autres constantes) ;
– au chapitre 8 (séries et algorithmes à convergence ultra-rapide de Ramanujan, des frères Chudnovsky et Borwein).

Des formules d'intégrales définies pour π

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\pi \ln 2$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, e^{-x}\, dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

En considérant des approximations des surfaces correspondant à ces intégrales par de petits rectangles, on en tire des approximations de π. De l'intégrale ci-dessus, par exemple, on déduit que :

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1+1/n^2} = \frac{\pi}{4}$$

qui peut se réécrire en :

$$\lim_{m \to \infty} \frac{4}{m}\left(\frac{1}{1+1} + \frac{2^2}{2^2+1} + \frac{3^2}{3^2+1} + \cdots + \frac{m^2}{m^2+1}\right) = \pi$$

Des formules de produits infinis pour π

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4\times 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\times 3^2}\right)\cdots = \frac{2}{\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{9n^2}\right) = \left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9\times 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{9\times 3^2}\right)\cdots = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{16n^2}\right) = \left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{16\times 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{16\times 3^2}\right)\cdots = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{36n^2}\right) = \left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{36\times 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{36\times 3^2}\right)\cdots = \frac{3}{\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\cdots = \frac{\pi}{2}\ \text{(Wallis)}$$

100 000 décimales de π en poster

Pour ceux qui désirent garder π sous les yeux, signalons l'initiative d'un professeur de mathématiques belge, Dirk Huylenbrouck, qui a réussi à faire tenir 100 000 décimales de π dans un poster de 88 × 64 centimètres. Vous pouvez le lui commander au prix de 314 francs belges (plus 200 francs belges de frais d'expédition) à l'adresse suivante : Dirk Huylenbrouck, Aartshertogstraat 42, 8400 Ostende.

Les 100 000 décimales colorées de Dirk Huylenbrouck dessinent π.

Les nombres autour de π

$2\pi =$	6,28318530717958647692528676655900576839433879875021 1641949889184615632812572417997256069650684234136
$3\pi =$	9,42477796076937971538793014983850865259150819812531 7462924833776923449218858626995884104476026351204
$4\pi =$	12,5663706143591729538505735331180115367886775975004 2328389977836923126562514483599451213930136846827
$5\pi =$	15,7079632679489661923132169163975144209858469968755 2910487472296153908203143104499314017412671058534
$1/\pi =$	0,31830988618379067153776752674502872406891929148091 28974953346881177935952684530701802276055325061719
$\sqrt{\pi} =$	1,77245385090551602729816748334114518279754945612238 7128213807789852911284591032181374950656738544665
$\pi^2 =$	9,86960440108935861883449099987615113531369940724079 0626413349376220044822419205243001773403718552232
$\pi^3 =$	31,0062766802998201754763150671013952022252885658851 0769414453810380639491746570603756670103260288619
$\pi^{10} =$	93648,04747608302097371669018491934563599815727551469 412705244939319824802228721644861526137334462975
$\ln(\pi) =$	1,14472988584940017414342735135305871164729481291531 1571513623071472137769884826079783623270275489708
$\log_2(\pi) =$	1,65149612947231879804327929510800733501847692676304 1529406788515488102963584541438960264792809854102
$\log_{10}(\pi) =$	0,49714987269413385435126828829089887365167832438044 24461340534999249471120895526746555473864642912226
$2^{\pi} =$	8,82497782707628762385642960420800158170441081527148 4926668959865055370087069523504305712837874804792
$10^{\pi} =$	1385,455731367011089140919936879688065066565539444998 214841804699873588554772116042203862637483814661
$e^{\pi} =$	23,1406926327792690057290863679485473802661062426002 1199344504640952434235069045278351697199706754921
$e + \pi =$	5,85987448204883847382293085463216538195441649307506 5395941912220031893036639756593199417003867283495
$e\pi =$	8,53973422267356706546355086954657449503488853576511 4961879601130179228611157330807572563869710473943

Écriture de π dans diverses bases

Dix mille décimales de π

3,
1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196
4428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
7245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
3305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912
9833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
0005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235
4201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
5024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
5982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989

3809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151
5574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012
8583616035637076601047101819429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842590694912
9331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279
6782354781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509302955
3211653449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938000
8164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333
4547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791786085784383
8279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284886269456042419652850222106611863
0674427862203919494504712371378696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047802759009

9465764078951269468398352595709825822620522489407726719478268482601476990902640136394437455305068203
4962524517493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597729754989301617539284681382
6868386894277415599185592524595395943104997252468084598727364469584865383673622262609912460805124388
4390451244136549762780797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028506
0168427394522674676788952521385225499546667278239864565961163548862305774564980355936345681743241125
1507606947945109659609402522887971089314566913686722874894056010150330861792868092087476091782493858
9009714909675985261365549781893129784821682998948722658804857564014270477555132379641451523746234364
5428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344
0374200731057853906219838744780847848968332144571386875194350643021845319104848100537061468067491927
8191197939952061419663428754440643745123718192179998391015919561814675142691239748940907186494231961

5679452080951465502252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996615014215
0306803844773454920260541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464965145390579626856
1005508106658796998163574736384052571459102897064140110971206280439039759515677157700420337869936007
2305587631763594218731251471205329281918261861258673215791984148488291644706095752706957220917567116
7229109816909152801735067127485832228718352093539657251210835791513698820914442100675103346711031412
6711136990865851639831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535
8932261854896321329330898570642046752590709154814165498594616371802709819943099244889575712828905923
2332609729971208443357326548938239119325974636673058360414281388303203824903758985243744170291327656
1809377344403070746921120191302033038019762110110044929321516084244485963766983895228684783123552658
2131449576857262433441893039686426243410773226978028073189154411010446823252716201052652272111660396

6655730925471105578537634668206531098965269186205647693125705863566201855810072936065987648611791045
3348850346113657686753249441668039626579787718556084552965412665408530614344431858676975145661406800
7002378776591344017127494704205622305389945613140711270004078547332699390814546646458807972708266830
6343285878569830523580893306575740679545716377525420211495576158140025012622859413021647155097925923
0990796547376125517656751357517829666454779174501129961489030463994713296210734043751895735961458901
9389713111790429782856475032031986915140287080859904801094121472213179476477726224142548545403321571
8530614228813758504306332175182979866223717215916077166925474873898665494945011465406284336639379003
9769265672146385306736096571209180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296
6171196377921337575114959501566049631862947265473642523081770367515906735023507283540567040386743513
6222247715891504953098444893330963408780769325993978054193414473774418426312986080998886874132604721

Dix mille décimales de π (suite) :

5695162396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435
4037014163149658979409243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881617
5578297352334460428151262720373431465319777741603199066554187639792933441952154134189948544473456738
3162499341913181480927777103863877343177207545654532207770921201905166096280490926360197598828161332
3166636528619326686336062735676303544776280350450777235547105859548702790814356240145171806246436267
9456127531813407833033625423278394497538243720583531147711992606381334677687969597030983391307710987
0408591337464144282277263465947047458784778720192771528073176790770715721344473060570073349243693113
8350493163128404251219256517980694113528013147013047816437885185290928545201165839341965621349143415
9562586586557055269049652098580338507224264829397285847831630577775606888764462482468579260395352773
4803048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772460

2901618766795240616342522577195429162991930645537799140373404328752628889639958794757291746426357455
2540790914513571113694109119393251910760208252026187985318877058429725916778131496990090192116971737
2784768472686084900337702424291651300500516832336435038951702989392233451722013812806965011784408745
1960121228599371623130171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187407866808818338510
2283345085048608250393021332197155184306354550076682829493041377655279397517546139539846833936383047
4611996653858153842056853386218672523340283087112328278921250771262946322956398989893582116745627010
2183564622013496715188190973038119800497340723961036854066431939509790190699639552453005450580685501
9567302292191393391856803449039820595510022635353619204199474553859381023439554495977837790237421617
2711172364343543947822181852862408514006660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594
0516553790686627333799585115625784322988273723198987571415957811196358330059408730681216028764962867

4460477464915995054973742562690104903778198683593814657412680492564879855614537234786733039046883834
3634655379498641927056387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830722
0126901475466847653576164773794675200490757155527819653621323926406160136358155907422020203187277605
2772190055614842555187925303435139844253223415762336106425063904975008656271095359194658975141310348
2276930624743536325691607815478181152843667957061108615331504452127473924544945423682886061340841486
3776700961207151249140430272538607648236341433462351897576645216413767969031495019108575984423919862
9164219399490723623464684411739403265918404437805133389452574239950829659122850855582157250310712570
1266830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101002996078386909291603028840026
9104140792886215078424516709087000699282120660418371806535567252532567532861291042487761825829765157
9598470356222629348600341587229805349896502262917487882027342092222453398562647669149055628425039127

5771028402799806636582548892648802545661017296702664076559042909945681506526530537182941270336931378
5178609040708667114965583434347693385781711386455873678123014587687126603489139095620099393610310291
6161528813843790990423174733639480457593149314052976347574811935670911013775172100803155902485309066
9203767192203322909433467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816228
8244625759163330391072253837421821408835086573917715096828874782656995995744906617583441375223970968
3408005355984917541738188399944697486762655165827658483588453142775687900290951702835297163445621296
4043523117600665101241200659755851276178583829204197484423608007193045761893234922927965019875187212
7267507981255470958904556357921221033346697499235630254947802490114195212382815309114079073860251522
7429958180724716259166854513331239480494707911915326734302824418604142636395480004480026704962482017
9289647669758318327131425170296923488962766844032326092752496035799646925650493681836090032380929345

9588970695365349406034021665443755890045632882250545255640564482465151875471196218443965825337543885
6909411303150952617937800297412076651479394259029896959469955657612186561967337862362561252163208628
6922210327488921865436480229678070576561514463204692790682120738837781423356282360896320806822246801
2248261177185896381409183903673672220888321513755600372798394004152970028783076670944474560134556417
2543709069793961225714298946715435784687886144458123145935719849225284716050492212424701412147805734
5510500801908699603302763478708108175450119307141223390866393833952942578690507643100638351983438934
1596131854347546495569781038293097164651438407007073604112373599843452251610507027056235266012764848
3084076118301305279320542746286540360367453286510570658748822569815793678976697422057505968344086973
5020141020672358502007245225632651341055924019027421624843914035998953539459094407046912091409387001
2645600162374288021092764579310657922955249887275846101264836999892256959688159205600101655256375678

Dix mille chiffres binaires de π

11,
0010010000111111011010101000100010000101101000110000100011010011000100110001100110001010001011100000
0011011100000111001101000100101001000000100100111000001000100010100110011111001100011101000000001000
0010111011111010100110001110110001001110011011001000100101000101001010000010000111100110001110001101
0000000100110111011110111110010101000110011011001111001101001110100100001100011011001100000010101100
0010100110110111110010010111110001010000110111010011111110000100110101011011010110110101010001110000
1001000101111001001000010110110101011101100110001001011110011111101100011011110100010011000100001011
1010011010011000110111111011010110101100001011111111110101110010110110111101000000011010110111111011
0111101110001110000110101111111011010110101000100110011111101001011010111010011111001001000001000101
1111000100101100011111111001100100100100101000011001100101000111101100111001000101101100111101110000
1000000000011111001011100010100001011000111011111100000101100110001101101001001000001101100001110001

0101011101001110011010011010010001011000111111101010001111110100100100110011110101111110000011011001
0101011101001000111101110010100011101011011001011000011100011000101111001101010110001000001000010101
0100101011101110011110110101010010100100000111011100001001011010010110011011010110011100001100001101
0101001110010010101011110010011000000001001111000101110100011011000000100011001010000110000010000101
1111000011001010010000010111100100011000101110001101101100111000111011111000111001111001110111001011
0000011000000011101000011000000011100110110010011110000011101000101110110000000111101000101000111110
1101011100010101011101111100000110111101001100010100101100100111011110001010111100101111110110100101
0101011000000101110001100000111001100101010100100101111100111010101001010101101010111001010001010111
0100100010011000011000100110001111101000000101000100000001010101110010100011100101101010001010101010
1011000100001011011010110100110011000101110000110100000100010100000111101000110011101010000101010100

1000011010101111011111000111001011101001100100111011001111101110000101000001000101100011011011111011
1100001010100010101110101001110001010101110101110100000110000011000111110110110011100101110000111110
0001011010011011100001111001001100011110101011111101011010111010001100110110110000100100110011110101
1100011110100011001001010011100000010010100010010101100001100111011100111011100011110100100010011000
0110101101001011101110011010111111000100101111111110100000011011011001100010100000100001100100110110
0001110110000000100111001100111110110010000110101001100100010100100001111100101011000110000001011101
1110110010000000001100101110111110000100010111010101110111101001100001010111010110110001110111000010
0110001000110000001011101011011001010001101110001000001000111000100100111110100000011101001110010110
1010110011000101000011110110110101101111111100111000001111110100010000100011100100101110000010110100
0100100000101010010010000100001000000000010001101001110010001111000001001010100111100001111110011011

0101111000100001110001100110100001000010111101101110100101101100100110100110011100001100100111000110
0001101010111101001110001000111100000110101001010001101000001101001011011000010101000010111101101000
1001011000001111101001110010100010101011010100010011001110100011011011101110111100001011011011000001
0011011110100011101111100100101110100011101111110000010100000111111011111011001010101001100010100001
1111000101100101000111010011100110101111000000010111011001100110110010100101100100111110100000100100
0011000011101000100010001100111011101000011000011001010001010110111110011111101101000111110110000100
1010010111000011001110111000101101011110101111101110000001101111011101011101100010000101110000010010
0000011100110100000000011010010001001001111101010110110000010110101010100110010011101101001110101010
0110001000110110001111110111011100000110000110111111111011011111011100100100001010011011000000100011
1101001101111101000011010111001001001101000000001010000100100100100011011011000011111110101011010011

0100100111110001110000001001101100000111010100110111001011001001100000001001100100011011011110110010
0101110101000111100111011000111101101110100011011110111101111110001111111110010100000001101010110110
0111100101001100001110111001011101101100111000001011110100000100110000000000011010111010110000011010
1001010011111011011001000000100111110110000011000100010111100101110010011110110000100001100101101010
0010010001100011011010001111101101101111101011110011111001101100010100111011010100010011001110011011
0010111010110011101101010010111011000110111101101101111111000101000100011111100110110011000010010101
0010110011001100100000010100010101000100101011110101111010111101000010011011111011100011110100000000
0100110111100011001101001010111111010110011000001111001010000000011100011001001011100100101110110011
1100000011001011101010000101011101000101110010000111010000001111110100100000101101011111001110011011
1001110100111111101111011011010101011110011100000010111101000110100110000000110010000010101101010110

Dix mille chiffres binaires de π (suite) :

1010000100000000011000110010000000001011000111001001111001011001111001111100100101111111101111110110001
1111101000111100110010001110101001011110100111111000110110110011001000100010111111000001111000111010 1
000101101101111111111110101100001011010110001010100101111010100000000111101100100010101101000001010101
0010101010110011001000111101101101011111101011111101001000111000011101100000001010011001100010111101 1
0100100000111110000000000110111111000001010011110010111000101011110111011110010100110111110001100101 0
0000000110101000011101010110001011101101111100010111011010011101101111010101010000101010100011110110
0010100001111110111111111110000111010110001100111001100101100011010001100010011110101010101110011011 0
1001010110110010011110110000101110111100101001011000110010001110000111111111101000110101110110111000
1111000000001000110100000000010000111110100011110110011000111111010010000110000011101110000100101011 11
1100101101010110110000101101110100011101001101011011100110100101001111100100011110011011011011111000

0100010101100101110100101000111001001001101111000100101111111101110010111100100001110000111011101111 1
0010110110101010010011001011011111100011001101100010111110110001001101000001110011101110010011000110
1110100011101111001000001100101011011010001101100111011101001100000000011101000001111110100111101111
1110001010111111000100011111101101001001010111011011110110100100110110101110100100001001000110011000
1110101010101101100011100111000101101011100100111101010110100000110100001000111011010001110100001010
1111110001110010010111100000100011100011110001011011001011111000111001110101100101001011011110001111
1111011011100010111110111111100100001001000101011011001001000100010001000101110000000100101001000000000
1101111100000001110001001111101011010101111010100000011010001000111111000011000111001101000111001111
1111000110010001101100111010100011000001101011010010111100101111001000100001100010111110000011100001
0111011101111111010100111010100101101111111101000101100000010000111111010000111100101101000001100110 0

0000111110110101011011110111010011101000000110001010110011110011110101101100111010001001111000101001
1001101101001010100001001111111000001111110100010011111000001011011101111100110001000011101110000001
1101001010101101101010001101100100010110010111111010001001100110100000001001010101110111000001011001
0011110011000111001100010100001000010001101000010100011101111111001101010110100100000011001010111011 1
1011010111111010100001101100011101010100010000101111010111111011100111010011010111001111111010111100
1101101011110000110001111011001111101000100110100000110101100100000100011011110100111010111000011110
0111111001001001000000000010010100001110001011010010000001110001101100110101111000100010011010000000 0
0000101110110101011110111000111000001010111100100100011001000011011010011011111100000000100110111001
0001111001010101011000111001000100011101010110011101111111010011010101010011110001100000101000011100 0
1001110110010101101001010011011111110010000001111101010110111010001000000010111001011011100111000101

1000001100100110000000110111011001100010100101011100111110101001000100011100100000011001011010000100
1110011100110100101001000001101100110100011100101101110010100111101100010100101010010100101000011011
0101000100000000010100101001101001010011001010010001010111010110000011110101011100111111101111001001
1011110001101110010000101011011000001010010001110110100000001111001100111010000000000000000100010111010
0110111110110101010101110001101111101001000111111111001010010110111011000110101100101010000001101110 1
1001000101011011011001100011011001010010000111100111101110011111100110110110111111110011010000000101
0010111011000101100001010101011001100100010100111011000000101101010111011010100110011111100011111010
0001000010001011110100100011110011001011011101000010100000111011010100100101101111010011100001110100 1
1011010110110011001010010100010011011011011101010000100100101110110001000001100100100110001000111010
1101011011101010011010110000010010011010011111011111101111110110011100111011100110000010111000100011 11

1110110110110010011001101110110010101010100011000111000101101001100110100001011111111111101010110011 0
0100010100100110110011000010101100011001111011100001000110010011011000000001010100101011101010000100 1
0100110000101001101000000010110010001001101000000011100100000110000011101000111110001111110101010010 01
1000100110100101101101000010100111010110010101101011100011111110010011010110100110011111011100111111 1
1101011010100001110100101001110000000111111011111110100000110000111101010100110100101101001110001110
0110111100000010010101011101110000010100110010111010010000010000110100001000111000011101011001001100
0110001110000001011101001110001100000000100001111011001100010111100000100101101000011010110011111100 11
1110101110101110111111001001001111001001011100011000000101000110101101101010011100001010000101101000
0111111100110101100001000101001010100000111000101000011010110111100111000101001100000101101010100101
0000000001110011011100111110000000111100001000001110001111111110111101010111001011100100011100111110 1

• 1 000 chiffres en base 3 de π

10,
01021101222201021100211111022122222011120121212120 01211001001012220222120120121112101210112002201202
10000101022010020111120002221022201100101110121101 20101000100022202122011002212221011222221210202201
10201210222022012022221201212002011122100001120220 01212201101110122210211002112122121211222122110212
21211010022120212101100121021001101110222202002111 11210102100000201122122010012111022022122001200200
20010012100101122200022202110211210122110122112120 22000011110120010111112200020112211111222010102 1122
11110221222121012002221022121220110012020221120000 20111212020200000020222210021220021011101201122121
10200001010210110020020222020210012200001000001020 000201011220212021220221101012122212122002021101222
21210212112200201100211110000221022011110200020011 12020102111101122220222201021221101010202121211201
01222220012012002221220100000110210022210001112111 00002221001202120212112111010211021201022010220021
21021122002120200211120010011111112022021120100121 11020001201002000112120001100211221221101211102110

• 1 000 chiffres en base 4 de π

3,
02100333122220202011220300203103010301212022023200 03130013031010221000210320020202212133030131000020
02323322212032301032123020211011022002013212032031 00010313132332111012123033031032210030123030002230
02212313302113301100313103332010311123112311101300 21011321020112311131212021132133230123310103010023
22122120313323112230023333311302312331000122313323 13232032012233323112220212133221122322133021001011
33010230133321210210220121211013230321011230331300 20000133023202201120323330011212031221020031201301
11131032122122101120333220333102103033113320031 21 11131020331302203223121120130120233031112020020111
10223232132311102210013130021122112123112130030031 11032102223302120001033011310123000203022012002011
33003022100113210120232031230320323320321321313023 00120003220120003212302132003220232300013220220332
31130111131330012331030110230213132022330233312211 11120011301200321211110211330322221111222321101113
10202120120212033220011010001111302203211222022222 23010023122310303011300310010110013220303222011110

• 1 000 chiffres en base 5 de π

3,
03232214303343241124122404140231421114302031002200 34441322110104033213440043244401441042334133011323
12342104201113210211420103320424312021121413112210 22003002040403322410430401343343324444214302101023
12244302432240240030143432311203341013003301123320 30323143414211234123220103102210101430204402123213
40401202023011300342323144110111441322140240421010 44232422120323323330330040344210113301442102424201
41144310033130313024333403033002431432133343133101 43203214343042024143213133100421412204410140233123
13223443224413001323231134030130121002342423444121 20033342413121204213403112033313233033143402303444
20244441401030004423120114203402041044110131112041 03221343234444144421142040143313044100432112021343
23411201324111421100111213332041232010302004012334 00441312000421104111244441031323322100422433200130
03113034012442102113120042430310044213023313303403 10403142212202300331231300020202022242140414121133
10320422433341143323243023004324301004412401044300 42432212043200101102410234301124221200204040033331

• 1 000 chiffres en base 6 de π

3,
05033005141512410523441405312532110230121444200411 525255331420333131135553513123345533410015154344401
23435445203004500242234314025131145211002025103101 05034103551355330505503255330032144152315424314050
00101130541352355521551335043133452221453052021510 05142043413033133331021044450520122353124405334144
23114114103105154025203241032512225453042432113455 14405425443013350532103421152111251455041301334102
10551214321430351142235510150413525540041033355012 24020400120051101233231034141413300254505500450240
55410211313113331202224214015252000041304110114100 13501141424111550313202130140202332251524243115553
35101055445224101550545254230443210412241442305424 12104543445121151021125203140420541512314224050131
02424201013505443133232252042144525244204024104035 33531504522441302051235033434401532033203203043130
04032032200231415533332523141310041155244400203122 53054254302120314213510254111230203404411304333223
21234521155221354054001115221110514001535102131503 12503240150321400524400051332511551030033535412254

• 1 000 chiffres en base 7 de π

3,
06636514320361341102634022446522266435206502401554 43215426431025161154565220002622436103301443233631
01130410055004102412535211655210553625150303312424 24026100436305645305263302413261402100450063401044
66521000354000404111331215235323543345406426461100 25423321501311161114533050354144200052625431241461
50646366612503406215665133426550531216141453602010 46310465243314220526011154664430043014201423420324
04521441513013241462052516615244334504503235001523 00303621644546106502134625634524435110564503111052
23325414033146163063055664000251241363533531355003 14364221261503410163015234165116544562313163301340
55000414333212332051104121040224050334650101022230 33046551161612504525065445643042136305422605604216
43101224533463224115516324432200114053015605444210 50563350104235163016562444305625336304625353314441
56436205254226516360164435122141333403112312014154 24110210002660121216352350661533034035553261641500
66012211202331214025043304251453534562125554400022 23150314261311233453165515230420653153421554135066

• 1 000 chiffres en base 8 de π

3,
11037552421026430215142306305056006701632112201116 02105147630720020273724616611633104505120207461615
00233573712431547464722061546012605155744574241564 77411526655524341105711026653546113637543364230413
51514337553260577727133364015337557343415376655211 47722656476220213704543771444450314507547105547560
40017456120543576026306644406607052723464644261772 43751114753740662535107562435331303430571526101025
22567173251220356045513155316060652344527446002361 35066010624140413703122027443056155470737071716713
01401641401633117016427300364243732705273701572305 13116742571375512530056140714524457472512552712127
22114142307640242005271216265052526102665514613415 01050172147241251032573707135144731756050105433373
60521272470527272030143733162703702646703623075277 26564315541114753436431123402242254147347343644230
32645671537422777201554612020623303540116317544152 31051037126140273662001456760427256751412726616702
30430056554506704043422372016471325461207555337716 03750410711340550440522204100021516217011247417633

• 1 000 chiffres en base 9 de π

3,
12418812407442788645177761731035828516545353462652 30112632145028386403435416330308678132787158853681
36538681688517621483015261781343583732478554878425 77332767713172313438820744712300648563174268561620
61053115802824247184184768004416114480215745811248 44278771628385564052275006455220006883256234351577
36011234062282231800300360211567678273355778067358 77254806407430272644202045212441586881257333677751
18861650878100137087014740087052525474124251263807 72480766245031444682463174201632015501324857354373
78163388617374570320265147462271442662365247524226 78481368268751503364770717820807137004562378242888
62622316572572582512042101754651584630556248828717 70864406622331382406313105263666450084302063168236
88128374646115115260555808035135826686623352710468 55225403440321523122882420433817448751270320286610
60844151808278615523275431225226788650270885285678 65451878537247103532882104466405550883353460685601
32028808578200203321144465071331705260186327847886 22451635330820312756043510775563728007330848746756

• 500 chiffres en base 12 de π

03,
01 08 04 08 00 09 04 09 03 11 09 01 08 06 06 04 05 07 03 10 06 02 01 01 11 11 01 05 01 05 05 01 10 00 05 07 02 09 02 09 00 10 07 08 00 09 10 04 09 02
07 04 02 01 04 00 10 06 00 10 05 05 02 05 06 10 00 06 06 01 10 00 03 07 05 03 10 03 10 01 05 04 08 00 05 06 04 06 08 08 00 01 08 01 10 03 06 08 03 00
08 03 02 07 02 11 11 11 10 00 01 03 07 00 11 01 02 02 06 05 05 02 09 10 08 02 08 09 00 03 11 04 11 02 05 06 11 08 04 00 03 07 05 09 10 07 01 06 02 06
11 08 10 05 04 06 08 07 06 02 01 08 04 09 11 08 04 09 10 08 02 02 05 06 01 06 11 04 04 02 07 09 06 10 03 01 07 03 07 11 02 02 09 11 02 03 09 01 04 08
09 08 05 03 09 04 03 11 08 07 06 03 07 02 05 06 01 06 04 04 07 02 03 06 11 00 02 07 10 04 02 01 10 10 01 07 10 03 08 11 05 02 10 01 08 10 08 03 08 11
00 01 05 01 04 10 05 01 01 04 04 10 02 03 03 01 05 10 03 00 00 09 10 08 09 00 06 11 06 01 11 08 11 04 08 10 06 02 02 05 03 10 08 08 10 05 00 10 04 03
11 10 00 09 04 04 05 07 02 03 01 05 09 03 03 06 06 04 04 07 06 11 03 10 10 11 11 07 07 05 08 03 09 07 05 01 02 00 06 08 03 05 02 06 11 07 05 11 04 06
02 00 06 00 11 11 00 03 11 04 03 02 05 05 01 09 01 03 07 07 02 07 02 09 10 02 01 04 07 05 05 03 05 03 01 07 09 03 08 04 08 10 00 04 00 02 11 09 09 09
11 05 00 05 08 05 03 05 03 07 04 04 06 05 10 06 08 08 00 06 07 01 06 06 04 04 00 03 09 05 03 09 10 08 04 03 01 09 03 05 01 09 08 05 02 07 11 09 03 09
09 11 01 01 02 09 09 00 10 11 11 00 03 08 03 11 01 00 07 06 04 05 04 02 04 05 07 07 10 05 01 06 00 01 11 03 06 02 04 10 08 08 11 07 10 06 07 06 10 03

• 200 chiffres de π en base 15

03,
02 01 12 13 01 13 12 04 06 12 02 11 07 14 05 00 08 04 08 04 07 07 03 14 00 06 09 01 09 13 01 14 05 00 09 06 03 13 11 07
09 12 06 09 07 03 09 14 10 03 07 03 01 14 07 09 12 13 14 01 00 10 08 14 13 04 12 06 03 00 10 08 03 11 09 11 05 13 10 04
06 04 10 09 01 05 02 00 08 06 02 10 10 01 10 04 06 04 13 13 10 05 00 11 14 04 10 10 05 02 12 01 12 04 05 07 05 04 01 14
13 05 10 14 05 13 13 02 13 10 06 10 01 05 10 01 04 12 13 09 10 00 05 01 11 13 06 12 07 06 02 07 02 05 01 11 02 02 13 01
03 05 04 09 09 03 06 12 00 05 09 02 05 12 11 02 04 05 01 04 00 12 02 09 08 13 03 03 00 11 09 10 04 11 01 10 02 06 05 01

• 200 chiffres de π en base 20

03,
02 16 12 14 16 09 16 11 17 19 09 13 02 01 17 18 17 11 03 14 16 10 12 11 00 03 06 01 14 11 02 11 15 11 08 17 08 03 09 08
07 13 14 11 17 05 01 08 00 12 15 10 16 08 08 13 02 12 06 02 07 12 03 15 18 10 12 13 18 07 13 13 18 13 06 14 12 00 13 00
15 14 03 13 09 17 04 11 13 04 00 05 04 08 11 14 13 07 01 06 04 01 10 16 04 17 16 01 14 12 10 12 12 09 13 13 01 03 07 09
18 02 13 04 02 00 12 09 19 03 10 18 14 02 11 19 00 02 02 13 10 15 17 08 02 14 09 15 06 10 03 09 04 09 11 09 06 13 08 03
03 10 12 18 12 09 17 15 17 10 03 01 08 01 09 08 13 15 08 05 17 17 06 10 01 07 14 19 19 02 18 03 06 00 00 06 01 10 09 19

• 200 chiffres de π en base 60

03,
08 29 44 00 47 25 53 07 24 57 36 17 43 04 29 07 10 03 41 17 52 36 12 14 36 44 51 50 15 33 07 23 59 09 13 48 22 12 21 45
22 56 47 39 44 28 37 58 23 21 11 56 33 22 40 42 31 06 06 03 46 16 52 02 48 33 24 38 33 22 01 00 01 40 29 38 06 08 59 13
41 02 28 16 43 56 40 07 14 57 49 58 02 15 16 01 15 57 03 24 59 18 19 13 06 47 50 31 11 14 39 23 55 06 13 39 13 12 06 55
21 32 32 26 50 16 01 44 57 19 35 01 17 00 12 57 05 32 52 18 03 00 37 08 57 41 19 16 58 49 17 44 28 09 36 42 43 01 58 22
14 24 43 45 10 20 24 07 54 19 20 57 05 20 13 44 20 45 35 00 34 12 45 32 25 59 38 16 51 09 36 07 05 47 30 41 28 31 08 29

• 2000 lettres de π (on l'écrit en base 26, on change 0 en *a*, 1 en *b*, etc.)

d,
drsqlolyrtrodnlhnqtgkudqgtuirxneqbckbszivqqvgdmelm uexroiqiyalvuzvebmijpqqxlkplrncfwjpbymggohjmmqisms
sciekhvdutcxtjpsbwhufomqjaosygpowupymlifsfiizrodpl yxpedosxmfqtqhmfxfpvzezrkfcwkxhthuhcplemlnudtmspwb

bjfgsjhncoxzndghkvozrnkwbdmfuayjfozxydkaymnquwlyka plybizuybroujznddjmojyozsckswpkpadylpctljdilkuuwkq
kwjktzmelgcohrbrjenrqvhjthdleejvifafqicqsmtjfppzxz ohyqlwedfdqjrnuhrlmcnkwqjpamvnotgvyjqnzmucumyvndbp

gmzvamlufbrzapmuktskbupfavlswtwmaetmvedciujtxmknvx kdtfgfhqbankornpfbgncdukwzpkltobemocojggxybvoaetmh
cttmajdxauwwpyvmufsudjvocmahmiihnclywnpiojegqwzmwr uyqewjyvbuhoowamctuxriiirvslltavutwbgxmeggfjwqmsvn

xipeazlbdlnhsxzedqqdolapezhkwmoaerlsujxvvhkrfkfezp chlmpdwrverockwhpqfdowoyvjwpxuogyhtiduarqzheqqvonl
mvzsnopaxnlekfnewfceujlexvedmnmhuyoxfanujcfmvsynwt uhpwlqqgnvrbocjhxeivloyxxywvaszhpsepnlwezgsowpewwv

svytttxlswcwcehehcwdfmxnmmhqsuvyiywjlghijclhyztsbk plhkqncdvrwrsibksaoitvtaxndyknhmmrpvijyjlxnhqtuzqq
ctckdldwbrbqzmvgvhubzefkhsldimflrpadntjbccduiloikj mqfbvfdeqoeosnxrfdmlopcsrejftgrqebppyluiyslbbofnyz

qynrmzztehdyuqyrnzxiskcddtbtlwgxyhmsafblbtxniroqmk ukutvepnqxnvzzwtymzfcpvsrygcygsvqufsbdaruuwjiqwoiy
ijdgwuaqlwjsqwhiizoahusdlcmfuulikuqphwruulempcvodp cwyzrdjizimzuzdfjzaaljsjrvdowhmcjdrmkvsnhggmsdbfcl

ncqhhtdanrggqlcgtihkfqhxzdgmdslpoxsiwmdgspfcyylrel ellgnzqkqisjhhuzievwuzvlymxhdopcilfrlebvjyrorhhhkg
wzasswdbdrmlrxpdfqqckkoiqtszosnyxrsinqjhuxnartidkc farckcpaaqacfspjxopagkurrszbkqjodmatyjnacetvwylzcw

gmjwmeugstlbejiwbjwrsiussmigxlshpgdeorxtuazgopxbmc weijdnttihpkyrewbljunbwifkodbmtwmirxrdjkfhfdxljata
heraoxxakijvnoblqosqvaduyxbojprvhiyymhannfbcnjzfoc xwaqravqzytjcuygcjdeznocgcvddmjeplmwvpktlxlnmanjdp

bdaqumegytazuamjmbnocikysfmwjcbuuqnijwvuqummsexuej uqszpgfpyvglbebxslnbeltrsllieahxkwidvtsttiikrglshd
mxunkebkystbrtqinirijfsbmoaulpjjxpcpultnblxllgnorz yhltufkreiwbzavxbenfgboeebvrjppwhlancjnesdfqzcvveo

doqscfnawahqmuatwqynjpcmdzpggxrtwrwxmpnwodwcaeeozb tekjtaeqmatpvbclpdnnolfulqovmnecuuwygiwjeoczdxysbn
xkjegteaowidftqrgvprevevounynlcwbmgbxbllgxjmyplewv nhwcpoovmrwkkibrcdeuejxhlorllrdrimvbieyecsgzekngmi

Sites Internet

ftp://www.cc.u-tokyo.ac.jp/ • 6,44 milliards de décimales de π et de 1/π à l'Université de Tokyo.

fhttp://gryphon.ccs.brandeis.edu:80/~grath/attractions/gpi/index.html • Pour la recherche de séquences de chiffres parmi 10 millions de décimales de π. Récupération possible de 10 millions de décimales.

http://www.access.digex.net/~admiral/piclub.html • Le club de π.

http://www.algonet.se/~eliasb/pi/lookpi.html • *Elias' Pi Page* : des images de π.

http://www.aros.net/~angio/pi_stuff/piquery.html • *The Pi-Search Page* : permet de rechercher des séquences dans 50 000 000 décimales de π, indique ce qui précède et ce qui suit la séquence recherchée.

http://www.ast.univie.ac.at/~wasi/PI/pi_club.html • *The Friend of Pi*. un club où, pour être admis, il faut réciter 100 décimales de π par cœur.

http://www.ccsf.caltech.edu/~roy/pi.formulas.html • Une longue liste de formules d'arcs tangentes pour π, classées par efficacité.

http://www.ccsf.caltech.edu/~roy/upi/coprime.html • Sur la probabilité que deux nombres soient premiers entre eux, calculée à partir des décimales de π.

http://www.cecm.sfu.ca/News/ • Informations sur le *Centre for Experimental and Constructive Mathematics* (CECM).

http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/PISTUFF/Apistuff.html • *Pi and Other Constants* : les articles récents des frères Borwein.

http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/people.html • À propos des derniers records de calcul pour diverses constantes mathématiques.

http://www.cs.umu.se/~mnlebs/pi/soundpi.html • Des sons obtenus à partir des chiffres de π.

http://www.go2net.com/internet/useless/useless/pi.html • *The Uselessness of π and its irrational friends* : de nombreux liens vers des pages concernant π.

http://www.mathsoft.com/asolve/constant/constant.html
http://www.mathsoft.com/asolve/constant/pstscrpt.html • De nombreuses pages sur π et les constantes mathématiques.

http://www.polytechnique.fr/poly/~bellard • À propos du record de Fabrice Bellard.

http://www.uni-ulm.de/~s_mdetti/PiStrategy.html • *How to memorize Pi ?* Méthodes mnémotechniques pour apprendre les décimales de π.

http://www.unipissing.ca/topology/z/a/a/a/26.htm
http://users.hol.gr/~xpolakis/piphil.html • Une collection remarquablement complète de textes mnémotechniques pour se souvenir de π dans de nombreuses langues. Le résultat d'un long travail de collecte de A. Hatzipolakis.

http://www.wri.com/~victor/articles/pi/pi.html • *Pi : A 2000-Year Search Changes Direction* : un article de Victor Adamchik et Stan Wagon sur la recherche de formules pour calculer π.

Bibliographie

Les numéros des chapitres concernés par les références sont indiqués entre accolades

G. Almkvist et B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π, and the Lady Diary*, in *The American Mathematical Monthly*, août 1988, pp. 581-608. {5, 7}

V. Adamchik et S. Wagon, *Pi : a 2000-Year Search Change Direction.* Manuscrit, 1995. {8}

Archimède, *Les œuvres d'Archimède.* Texte établi et traduit par Charles Mügler, Les Belles Lettres, Paris 1970. {3}

J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, *Analyse* (cours de mathématiques-2, classes préparatoires et 1er cycle universitaire), Dunod, Paris, 1988. {1}

E. Assmus, *Pi,* in *The American Mathematical Monthly*, 92, 1985, pp. 213-214. {1}

M. Authier, *Archimède, le canon du savant,* Éléments d'histoire des sciences (sous la direction de M. Serres), Bordas, Paris, 1989, pp. 101-1128. {3}

A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Mathematical Library, 1975-79-90. {9}

D. Bailey, *Numerical Results on the Transcendence of Constants Involving π, e and Euler's Constant*, in *Mathematics of Computation*, 50, 1988, pp. 275-281. {9}

D. Bailey, *The Computation of Pi to 29 360 000 Decimal Digits Using Borweins' Quartically Convergent Algorithm,* in *Mathematics of Computation*, janvier 1988, pp. 283-296. {7}

D. Bailey, J. Borwein, P. Borwein et S. Plouffe, *The Quest for Pi,* in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, n°1, 1997, pp. 50-57. {3-8}

D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe, *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, in *Mathematics of Computation*, 1997. {8}

D. Bailey et S. Plouffe, *Recognizing Numerical Constants,* Manuscript, Fraser University, 1996. {8, 9}

P. Beckmann, *A History of Pi,* St. Martin's Press, New York, 1971. {3-5}

L. Berggren, J. Borwein et P. Borwein, *A Sourcebook on Pi*, Springer-Verlag, New York, 1997. {1-10}

B. Berndt, *Ramanujan's Notebooks,* I-IV, Springer-Verlag, New York, 1991-1994. {7}

M. Boll, *Une histoire des mathématiques,* Presses Universitaires de France, Paris, 1968. {2-4}

E. Borel, *Presque tous les nombres réels sont normaux,* in *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 27. 1909. pp. 247-271. {10}

J. Borwein et P. Borwein, *More Quadratically Converging Algorithms for π*, in *Mathematics of Computation*, 46, 173, 1986, pp.247-253. {7}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley and Sons, New York, 1987. {5,6,7,9}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *More Ramanujan-Type Series for 1/π*, in *Ramanujan Revisited : Centenary Conf. Proc.* (Univ. of Illinois), Academic Press, 1987. {7}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Ramanujan and Pi*, in *Scientific American*, février 1987, pp. 112-117. Traduction dans *Pour La Science* sous le titre *Srinivasa Ramanujan*, n°108, 1988, pp. 36-46. Repris dans *Les mathématiciens*, éditions *Pour La Science*, Paris, 1996. {7}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *On the Complexity of Familiar Functions and Numbers*, in SIAM *Review*, vol. 30, n° 4, 1988, pp. 589-601. {5, 7, 10}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Strange Series and High Precision Fraud*, in *The American Mathematical Monthly*, août-septembre 1992, pp. 622-640. {2, 10}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Some Observations on Computer Aided Analysis*, 1993, preprint CECM, Fraser University, 1993. {8, 9}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Class Number Three Ramanujan Type Series for 1 / Pi*, in *J. Comput Appli. Math.*, 46, 1993, pp. 281-290. {7}

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Making Sense of Experimental Mathematics*, 1996, preprint CECM, Fraser University, 1996. {8, 10}

J. BORWEIN et F. GARVAN, *Approximation to π via Dedekind eta Function*, 1996, preprint CECM, Fraser University, 1996. {7}

J. BORWEIN, P. BORWEIN et H. BAILEY, *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi, or How to Compute One Billion Digit of Pi*, in *The American Mathematical Monthly*, mars 1989, pp. 201-219. {7}

J. BORWEIN, P. BORWEIN et K. DILCHER, *Pi, Euler Numbers, and Asymptotic Extensions*, in *The American Mathematical Monthly*, 96, 1989, pp. 681-687. {2}

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques. Fonction d'une variable réelle*, Hermann, Paris, 1976. {1}

C. BREZINSKI, *Accélération de la convergence en analyse numérique*, Springer-Verlag, Berlin 1977. {6}

C. BREZINSKI, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, 1991. {4}

C. BREZINSKI et M. REDIVO-ZAGLIA, *Extrapolation Methods : Theory and Practice*, North-Holland 1992. {4, 6}

R. BRENT, *Fast Multiple-precision Evaluation of Elementary Fonctions*, in *Journal of Asso. Computing Machinery*, 1976, pp. 242-251. {7}

J.-Cl. CARREGA, *Théorie des corps, la règle et le compas*, éditions Hermann, Paris, 1981. {1, 2, 3, 9}

D. CASTELLANOS, *The Ubiquitous Pi (Part I and II)*, in *Math. Mag*, 61, pp. 67-98, pp. 148-163, 1988. {1, 2}

J.-L. CHABERT, E. BARBIN, M. GUILLEMOT, A. MICHEL-PAJUS, J. BOROWCZYK, A. DJEBBAR et J.-C. MARTZLOFF, *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*, éditions Belin, Paris, 1994. {3, 4, 5}

G. CHAITIN, *Information, Randomness and Incompleteness : Papers on Algorithmic Information Theory*, World Scientific, Singapore, 1987. {10}

D. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten,* in *J. London Math. Soc.* 8. 1933. pp. 254-260. {9, 10}

D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY, *Padé and Rational Approximation to Systems of Functions and Their Artihmetic Applications*, Lecture Note in *Mathematics* 1052, Springer, Berlin, 1984. {7}

D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY, *The Computation of Classical Constants,* in *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 86, 1989, pp. 8178-8182. {7}

J. CONWAY et R. GUY, *The Book of Numbers,* Springer-Verlag, 1996. {3, 5, 9, 10}

J. COOLEY et J. TUKEY, *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, in *Math of Computation*, 19, 1965, pp.297-301. {7}

A. COPELAND et P. ERDÖS, *Note on Normal Numbers,* in *Bulletin American Mathematical Society*, 52, 1946, pp. 857-860. {10}

R. CUCULIÈRE, *Les probabilités géométriques (aiguilles de Buffon)*, in *Le Hasard, Dossier Pour la Science*, avril 1996, pp. 82-87. {1, 2}

Z. DAHSE, *Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet,* in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 27, 1844, p. 198. {5}

J. DAVIS et R. HERSH, *L'univers mathématique,* éditions Gauthier-Villars, Paris, 1985. Traduction de : *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1982. {1, 9}

F. de LAGNY, *Mémoire sur la quadrature du cercle et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné,* Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1719, (Paris 1721), pp. 135-145. {6}

P. DEDRON et J. ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, éditions Magnard, Paris, 1959. {3, 4, 5}

J.-P. DELAHAYE, *Information, complexité et hasard,* éditions Hermès, Collection Langue-Raisonnement-Calcul, Paris, 1994. {10}

J.-P. DELAHAYE, *Logique, informatique et paradoxes*, Bibliothèque *Pour La Science*, éditions Belin, Paris, 1995. {4, 6, 10}

J.-P. DELAHAYE, *Les nombres-univers,* in *Pour La Science*, juillet 1996, pp. 104-107. {10}

J.-P. DELAHAYE, *Sequence Transformations*, in *Series on Computational Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1988. {6}

J.-P. DELAHAYE, *Randomness, Unpredictability and Absence of Order,* Colloque international sur la Philosophie des Probabilités, organisé par le CNRS et l'Institut d'histoire des sciences de Paris, 10-12 mai 1990, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993, 145-167. {10}

R. DESCARTES, *Circuli quadratio,* Manuscrit édité à Amsterdam en 1701, œuvres éditées par C. Adam et P. Tannery, t. X, 1908, pp. 304-305 ; réédition Vrin, Paris 1974. {4, 9}

J. DHOMBRES, A. DAHAN-DALMEDICO, R. BKOUCHE, C. HOUZEL et M. GUILLEMOT, *Mathématiques au fil des âges*, éditions Gauthier-Villard, 1987. {3, 4}

J. DIEUDONNÉ, *Abrégé d'histoire des mathématiques,* 1700-1900, éditions Hermann, 1978. {3, 4, 9}

P. DUBREIL, *L'histoire des nombres mystérieux* π, e, i, C, in *Les grands courants de la pensée mathématique*, présentés par F. Le Lionnais, éditions Albert Blanchard, Paris 1962. {5}

D. FERGUSON, *Evaluation of π. Are Shanks' Figures Correct?*, in *Mathematical Gazette*, 30, 1946, pp.89-90. {5}

D. FERGUSON et J.W. WRENCH Jr., *A New Approximation of π (conclusion)*, in *Mathematical Tables and other Aids to Computation*, 3, 1948-1949, pp. 18-19. {5}

D. FERGUSON, *Value of π*, in *Nature*, 17, 1946, p. 342. {5}

D. FERGUSON, J.W. WRENCH Jr. et L.B. SMITH, *A New Approximation of π*, in *Mathematical Tables and other Aids to Computation*, 2, 1946-1947, pp. 143-145. {5}

J.-P. FONTANILLE, *π en musique : écouter les décimales du nombre π*, in *Pour la Science*, septembre 1996, pp. 96-97. {2}

M. GARDNER, *New Mathematical Diversions from Scientific American* (chapitre 8, sur π), Simon and Schuster, New York, 1966, traduction française : *Nouveaux divertissements mathématiques*, éditions Dunod, Paris, 1970. {3, 4, 5}

M. GARDNER, *The Random Number Omega Bids Fair to Hold the Mysteries of the Universe*, in *Scientific American*, novembre 1979, pp. 20-34, traduction : *Le nombre oméga*, in *Pour la Science*, janvier 1980, pp. 104–110. {10}

F. GENUYS, *Dix mille décimales de π*, in *Chiffres*, 1, 1958, pp. 17-22. {5}

C. GOLDSTEIN, *L'un est l'autre : pour une histoire du cercle*, in *Éléments d'histoire des sciences*, sous la direction de M. Serres, éditions Bordas, Paris, 1989, pp. 129-150. {3, 4}

E. GOODWIN, *Quadrature of the Circle*, in *The American Mathematical Monthly*, 1, pp. 246-247. 1894. {2}

E. GOODWIN, *(A) The Trisection of an Angle, (B) Duplication of the Cube*, in *The American Mathematical Monthly*, 2, pp. 337-, 1895. {2}

J. GUILLOUD et M. BOUYER, *1 000 000 de décimales de π*, Commissariat à l'Énergie Atomique, 1974. {5}

G. HARDY, *L'apologie d'un mathématicien* et *Ramanujan, un mathématicien indien*, éditions Belin, Paris, 1985 (la seconde partie est la traduction *Ramanujan,* Cambridge University Press, 1940) {7}

G. HARDY et E. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, First Edition 1938, Fifth Edition 1979. {9, 10}

E. HOBSON, *Squaring the Circle : a History of the Problem*, Cambridge, 1913, rééd. Chelsea Publish. Company, New York, 1953. {1-5, 9}.

B. BURKE HUBBARD, *Ondes et ondelettes, la saga d'un outil mathématique*, *Pour La Science*, collection Sciences d'avenir, diffusion Belin, 1995. {7}

D. HUYLEBROUCK, *The π-room in Paris*, in *The Mathematical Intelligencer*, 1996, n° 2, pp. 51-52. {5}

D. HUYLEBROUCK, *Van Ceulen's Tombstone*, in *The Mathematical Intelligencer*, 1995, n° 4, pp. 60-61. {3}

A. JONES, S. MORRIS et K. PEARSON, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer Verlag, 1991. {2, 3, 9}

R. KANNAN, A. LENSTRA et L. LOVASZ, *Polynomial Factorization and Randomness of Bits of Algebraic and Some Transcendental Numbers*, in *Mathematics of Computation*, vol. 50, 1988, pp. 235-255. {10}

A. Karatsuba, article en russe : *Doklady Akad. Naut SSSR*, 145, 1962, pp. 293-294 (en anglais : *Soviet Physics-Doklady 7*, 1963, pp. 595-596). {7}

M. Keith, *Circle Digit A Self-Referential Story,* in *The Mathematical Intelligencer*, 1986, pp.5 6-57. {2}

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory,* in *Mathematical Association of America*, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1991 (addendum 1993). {9, 10}

A. Kolmogorov, *Three Approaches for Defining the Concept of Information Quantity,* in *Information Transmission*, vol. 1, 1965, pp. 3-11. {10}

J. Lambert, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*, in *Histoire de l'Académie de Berlin*, t. 17, 1761, pp. 265-322, *Mathematische Werke*, t. II, pp. 112-159. {9}

S. Lang, *Algebra,* Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1965. {9}

H. Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques,* Gauthier-Villars, 1949, réimpression Jacques Gabay, 1987. {9}

F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables,* éditions Hermann, Paris, 1983. {1, 2}

Le nombre π, in *Le Petit Archimède*, ouvrage collectif de J. Brette, R. Cuculière, Y. Roussel, L. Felix, M. Dumont, M. Milgram, G.Th. Guilbaud, A. Viricel, G. Kreweras, L. Étienne, M. Puissegur, Supplément au *Petit Archimède* n° 64-65, 1980. {2-5, 9, 10}

D. Lehmer, *On Arccotangent Relations* for π, in *The American Mathematical Monthly*, 45, 1938, pp. 657-554. {5}

G. Leibniz, *Naissance du calcul différentiel* (26 articles des *Acta eruditorum* introduits, traduits et annotés par Marc Parmentier), éditions Vrin, Paris, 1995. {4}

M. Lesieur, *Nombres algébriques ou transcendants,* cours polycopié de l'Université d'Orsay, 1973. {9}

M. Li et P. Vitanyi, *Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer-Verlag, 1997 (2e édition). {10}

R. Ligonnière, *Préhistoire et histoire des ordinateurs*, éditions Robert Laffont, Paris, 1987. {5}

F. Lindemann, *Über die Zahl* π, in *Mathematische Annalen*, 20, 1882, pp. 213-225. {9}

J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques,* in *Journal de Mathématiques,* XVI, 1851, pp. 133-142. {9}

J. Loxton et A. van der Poorten, *Arithmetic Properties of Automata : Regular Sequences*, in *J. reine angew. Math.*, 392, 1988, pp. 57-69. {9, 10}

K. Mahler, *Arithmetical Properties of the Digits of the Multiples of an Irrational Number,* in *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8, 1973, pp. 191-203. {10}

K. Mahler, *On the Approximation of Pi*, in *Indagiones Math.*, 15, 1953, pp. 30-42 {9}.

P. Martin-Löf, *On the Concept of Random Sequence*, in *Theory Probability Appl.*, vol. 11, 1966, pp. 177-179. {10}

R. Matthews, *Pi in the Sky,* in *Nature*, vol. 374, pp. 681-682. {1}

M. MIGNOTTE, *Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres*, in *Bull. Soc. Math. Fran.*, Mem. 37, 1974, pp. 121-132. {9, 10}

J. MONTUCLA, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, Paris, 1754. {2, 3, 9}

H. MORAVEC, *Mind Children. The Futur of Robot and Human Intelligence*, Havard University Press, Cambridge, 1988, traduction française : *Une vie après la vie*, édition Odile Jacob, Paris 1992. {7}

G. MOORE, *Electronics Magazine*, avril 1965 (énoncé de la loi de Moore) {7}

G. MIEL, *Of Calculations Past and Present : The Archimedean Algorithm*, in *The American Mathematical Monthly*, 90, 1983, pp. 17-35. {3}

I. NEWTON, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, 1664-1671, traduction de M. de Buffon : *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Paris 1740. {4}

S. ORTOLI et N. WITKOWSKI, *La baignoire d'Archimède*, éditions du Seuil, 1996. {3}

OULIPO, *Atlas de littérature potentielle*, éditions Gallimard, Collection Idées, Paris, 1981. {2}

OULIPO, *La littérature potentielle*, éditions Gallimard, Collection Idées, Paris, 1973. {2}

Papyrus Rhind, *The Rhind Mathematical Papyrus*, édité par A.B. Chace, Oberlin, Ohio, 1927, 1929. {3}

G. PHILLIPS, *Archimedes and the Complex Plane*, in *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, 1984, pp. 108-114. {3}

Les mathématiciens, éditions *Pour La Science*, diffusion Belin, Paris, 1996. {3}

R. PRESTON, *The Mountains of Pi*, in *The New Yorker*, 2 mars 1992, pp. 36-67. {7}

S. RABINOWITZ et S. WAGON, *A Spigot Algorithm for Pi*, in *The American Mathematical Monthly*, vol. 103, 1995, pp. 195-203. {6}

S. RABINOWITZ, *A Spigot-Algorithm for π*, in *Abstract of the American Mathematical Society*, vol. 12, 1991, p. 30. {6}

S. RAMANUJAN, *Modular Equation and Approximations to π*, in *Quart. J. Math*, 45, 1914, pp. 350-372. {7}

G. RAUZY, *Nombres normaux et processus déterministes*, in *Acta Arithmetica*, XXXIX, 1976. pp. 211-225. {9}

G. REITHWIESNER, *An ENIAC Determination of π and e to more than 2 000 Decimal Places*, in *Mathematical Tables and other Aids to Computation*, 4, 1950, pp. 11-15. {5}

W. RUTHERFORD, *Computation of the Ratio of the Diameter of a Circle to its Circumference to 208 places of Figures*, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 131, 1841, pp. 281-283. {5}

D. SAADA, *La détermination des décimales de π*, in *Bulletin de l'APMEP* (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), avril 1991, pp. 163-165. {6}

E. SALAMIN, *Computation of Pi Using Arithmetic-Geometric Mean*, in *Mathematics of Computation*, vol. 30, 1976, pp. 565-570. {7}

A. SALE, *The Calculation of e to many Significant Digits*, in *Computing Journal*, 11, 1968, pp. 229-230. {6}

H. SCHEPLER, *The Chronology of Pi,* in *Math. Mag.*, 1950, 165-170, 216-228, 279-283. {3, 4, 5}

W. SCHMIDT, *On Normal Numbers,* in *Pacific Journal of Mathematics*, 10, 1960, pp. 661-672. {10}

A. SCHÖNHAGE et V. STRASSEN, *Schnell Multiplikation Grosser Zahlen*, in *Computing*, 7, 1971, 281-292. {7}

D. SHANKS et J. WRENCH, *Calculation of Pi to 100,000 Decimals*, in *Mathematics of Computation*, vol. 16, 1962, pp. 76-79. {5}

D. SHANKS, *Dihedral Quartic Approximations and Series for Pi,* in *J Number Theory*, 14, pp. 397-423, 1982.

W. SHANKS, *Contributions to Mathematics, Comprising Chiefly the Rectification of the Circle to 607 Places of Decimals*, Londres, 1853. {5}

W. SHANKS, *On Certain Discrepancies in the Published Numerical Value of π*, in *Proceedings of the Royal Society of London*, 22, 1873, pp. 45-46. {5}

W. SHANKS, *On the Extension of the Numerical Value of π*, in *Proceedings of the Royal Society of London*, 21, 1873, p.318. {5}

D. SINGMASTER, *The Legal Values of π*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, 1985, pp. 67-72. {2}

S. SKIENA, *Further Evidence for Randomness in π*, in *Complex Systems*, 1, 1987, pp. 361-366. {10}

N. SLOANE et S. PLOUFFE, *The Encyclopedia of Integer Sequences,* Academic Press, 1995. {1, 2}

S. SMITH, *The Great Mental Calculators,* Columbia University Press, New York, 1983. {5}

I. STEWART, *Les algorithmes compte-gouttes,* in *Pour la Science*, n° 215, septembre 1995. {6}

C. STRÖRMER, *Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes,* in *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, XIX, n° 3, 1896, pp. 74-87. {5}

J. TODD, *A Problem on Arc Tangent Relations*, in *The American Mathematical Monthly*, 8, 1949, pp. 517-528. {5}

S. WAGON, *Is Pi Normal?,* in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, 1985, pp. 65-67. {10}

M. VAN LAMBALGEN, *Von Mises' Definition of Random Sequences Reconsidered*, in *The Journal of Symbolic Logic*, 52, 1987, pp. 725-755. {10}

M. VAN LAMBALGEN, *Algorithmic Information Theory,* in *The Journal of Symbolic Logic*, 54, n° 4, 1989, pp. 1389-1400. {10}

M. WANTZEL, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre à la règle et au compas*, in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, 1837, pp. 366-372. {3, 9}

E. WAYMIRE, *Buffon Needles,* in *The American Mathematical Monthly*, vol. 101, 1994, pp. 550-559. {1}

E. WEGERT et L.N. TREFETHEN, *From the Buffon Needle Problem to the Kreiss matrix Theorem,* in *The American Mathematical Monthly*, vol. 101, 1994, pp. 132-139. {1}

D. WELLS, *Le dictionnaire Penguin des nombres curieux,* éditions Eyrolles, Paris, 1995. {2}

J. WRENCH, *The Evolution of Extended Decimal Approximation to π*, in *The Mathematical Teacher*, december 1960, pp. 644-650. {5}

Index

Références des illustrations

P. 15 : Hermann. P. 19 : NASA. P. 39 : PLS. P. 48 : © Musée du Louvre-Antiquités orientales/BM 85194. P. 49 : photo R.M.N. Chuzeville. P. 50 : Kolman. P. 55 *(en haut)* : © B.N.U., Strasbourg. P. 55 *(au milieu)* : Pacioli, *De divina Proportione*, Ambrosiana, Milan. P. 56 : Belin (coll. J.L.V.). P. 61 : D. Huylebrouck. P. 63 : Roger-Viollet. P. 64 : Roger-Viollet. P. 67 : Explorer. P. 69 : Explorer. P. 70 *(en haut)* : Roger-Viollet. P. 70 *(en bas)* : IBM coll. Images/Neuhart Donges Neuhart Designers Inc./Mardaga. P. 71 : J. Whitaker. P. 72 : Roger-Viollet. P. 73 *(en bas)* : New York Public Library. P. 82 : © Palais de la Découverte. P. 84 : © Trustees of the Science Museum. P. 85 : coll. P.P.P./I.P.S. P. 88 : C.E.A/J. Guilloud/M. Bouyer. P. 113 *(en haut)* : John Moss/Royal Society, London. P. 113 *(en bas)* : «Radio Times»/Hustler Picture Library. P. 117 : Bettmann Archive. P. 118 : J. et P. Borwein. P. 121 : I. Roman/New Yorker. P. 123 : L. Dersot. P. 125 : Art Resource. P. 139 : S. Plouffe. P. 155 *(en haut)* : Universitets biblioteket, Oslo. P. 155 *(en bas)* : D.A. Johnson. P. 160 *(en haut)* : Roger-Viollet. P. 160 *(en bas)* : Ullstein. P. 170 : E. Bröms. P. 171 : D.I.T.E. P. 177 : © Cadence Books/Shogakukan Inc./Jun Oi. P. 181 : coll. Violet. P. 185 : Novosti.

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal : Janvier 1998 - N° Editeur : 1825.03 - N° Imprimeur : 12108

BIBLIOTHÈQUE
POUR LA SCIENCE

Tous les écoliers connaissent π, rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, mais cette image familière dissimule un abîme de complexité. Nombre-univers, π nous égare dans la suite illimitée de ses chiffres, sans motifs ni régularités... apparentes. Depuis l'Antiquité, d'étranges explorateurs en chassent les décimales. Ils sont aujourd'hui secondés par de puissants ordinateurs, et disposent d'algorithmes de plus en plus efficaces : s'il a fallu 250 ans pour passer de 100 à 1 000 décimales connues, 25 ans ont suffi pour arriver au million, et 16 ans pour arriver au milliard. Cette quête, en apparence futile, a profité des progrès des mathématiques, mais les a aussi suscités, car π est au cœur des mathématiques. Ce livre retrace l'histoire de son exploration en insistant sur les épisodes les plus récents, qui nous font percevoir tout le mystère de ce nombre : plus on connaît π, plus il se dérobe.

Jean-Paul Delahaye est professeur d'informatique à l'Université des sciences et technologies de Lille, et chercheur au laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.